

# **Квантиль**

*международный эконометрический журнал  
на русском языке*

**№1  
сентябрь 2006 г.**

## **СОДЕРЖАНИЕ ВЫПУСКА**

Редактор и редакционный совет. Обращение к читателям 1

### **Эконометрический ликбез: прогнозирование временных рядов**

Цыплаков Александр. Введение в прогнозирование в классических моделях временных рядов	3
Кохрейн Джон. Прогнозирование и импульсные отклики в линейных системах	21
Содерлинд Пол. Прогнозирование доходностей акций	27
Анатольев Станислав. Тестирование на предсказуемость	39
Ицхоки Олег. Выбор модели и парадоксы прогнозирования	43
Маккракен Майкл. Парные тесты на одинаковую точность прогнозов	53

### **Впечатления от конференции**

Зинде-Уолш Виктория. Ежегодная встреча британской эконометрической группы	63
---	----

### **Статьи**

Силиверстов Борис. Денежный спрос в Латвии	67
Арженовский Сергей. Социально-экономические детерминанты курения в России	81
Белоусов Сергей. Моделирование волатильности со скачками: применение к российскому и американскому фондовым рынкам	101

# **Квантиль**

**№1, сентябрь 2006 г.**

Сайт в Интернете: <http://quantile.ru>

Адрес электронной почты: [quantile@quantile.ru](mailto:quantile@quantile.ru)

Доступ к журналу бесплатный и неограниченный

Подписка принимается по адресу: [subscribe@quantile.ru](mailto:subscribe@quantile.ru)

## **РЕДАКТОР**

Станислав Анатольев

Российская Экономическая Школа (Москва, Россия)

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ**

Виктория Зинде-Уолш

Университет МакГилл (Монреаль, Канада)

Рустам Ибрагимов

Гарвардский Университет (Кэмбридж, США)

Алексей Онацкий

Колумбийский Университет (Нью-Йорк, США)

Владимир Павлов

Технологический университет Квинсленда (Брисбен, Австралия)

Константин Тюрин

Университет штата Индиана (Блумингтон, США)

Александр Цыплаков

Новосибирский Государственный Университет (Новосибирск, Россия)

## **К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ**

Рукописи для публикации в разделе «Статьи» принимаются в электронном виде по адресу [submit@quantile.ru](mailto:submit@quantile.ru). Работы могут принадлежать любой прикладной сфере экономической науки. Главным требованием является интенсивное использование адекватных эконометрических методов. Рукопись должна быть написана на русском (для русскоязычных авторов) или на английском (для остальных авторов) языке в формате *Microsoft Word* или (предпочтительнее) *LaTeX*, и по объему не превышать 30 страниц формата А4 с двойным междустрочным интервалом. Работы подвергаются контролю качества членами редакционного совета и независимыми референтами. Перспективная работа может быть при необходимости возвращена автору на доработку. Редакция также приглашает к сотрудничеству экспертов по эконометрике, готовых внести вклад в методологические рубрики журнала.

При публикации статьи или методологического эссе в журнале «Квантиль» передача авторских прав не происходит ни полностью, ни частично.

## Уважаемые читатели!

Перед вами – первый выпуск эконометрического журнала «*Квантиль*». Журнал создан с целью содействовать повышению уровня экономических исследований российских экономистов, в особенности их прикладных работ. Не секрет, что в России ощущается недостаток современной эконометрической литературы на русском языке, да и к иноязычным источникам доступ ограничен. Главная из целей настоящего журнала – восполнить этот серьезный пробел.

Этому служит в первую очередь раздел «Эконометрический ликбез», содержащий методологические эссе, объединенные единой тематикой и написанные международными экспертами в данной области. Подобный раздел отдельного выпуска журнала может в какой-то степени служить мини-учебником по конкретной тематике. В частности, тема первого выпуска – «прогнозирование временных рядов», а эссе написаны такими авторитетами в этой области, как Джон Кохрейн, Пол Содерлинд, Майкл Маккракен. Другой методологический раздел – «Впечатления от конференции», где непосредственные участники эконометрических форумов будут информировать читателей об их тематике. В первом выпуске, в частности, Виктория Зинде-Уолш поделится своими впечатлениями от встречи британской эконометрической группы летом текущего года. Для будущих выпусков журнала запланированы также разделы «Часто задаваемые вопросы», где эксперты ответят на вопросы читателей, и «Софт и сеть», посвященный эконометрическим ресурсам в интернете и эконометрическим программным продуктам. Просим читателей присылать предложения и наболевшие вопросы по электронной почте на адрес [quantile@quantile.ru](mailto:quantile@quantile.ru), чтобы мы могли выявить структуру спроса на методологические материалы и оптимально планировать будущие выпуски. Просим откликнуться также экспертов, готовых участвовать в подготовке методологических разделов.

Второе основное предназначение журнала – распространение результатов исследований экономистов, присущее любому научному изданию. Одно из основных условий публикации – демонстрация эконометрического инструментария, адекватного поставленной задаче, и его качественная реализация. При этом тематика задачи может быть любая, от экономики труда до финансовой эконометрики. Пожалуйста, присылайте свои работы по электронной почте на адрес [submit@quantile.ru](mailto:submit@quantile.ru). Работы будут подвергаться контролю качества членами редакционного совета и независимыми референтами. Первый выпуск журнала содержит три исследовательские статьи, но в будущем мы надеемся на постепенный рост подобных публикаций.

Отметим, что название журнала не означает, что тема квантильной регрессии нам более дорога, чем любая другая. Название «*Квантиль*», скорей, должно ассоциироваться с названием другого журнала, «*Квант*», который аналогичным образом служит отличным источником информации для многих будущих математиков и физиков школьного возраста. Отдельное спасибо Александру Цыплакову и Ольге Крюковской за такую ассоциацию.

Все материалы журнала находятся в свободном доступе в интернете. Пользователю остается лишь зайти на наш сайт <http://quantile.ru>, скачать либо весь выпуск, либо интересующий раздел, либо нужную статью, распечатать материал и изучать его. Остается пожелать читателям и нам самим удачи и успеха!

Редактор и редакционный совет.



# Эконометрический ликбез: прогнозирование временных рядов

## Введение в прогнозирование в классических моделях временных рядов<sup>\*</sup>

Александр Цыплаков<sup>†</sup>

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

В настоящем эссе обсуждаются базовые понятия прогнозирования временных рядов и излагаются традиционные подходы к прогнозированию в классических моделях Бокса–Дженкинса, векторных авторегрессиях и моделях авторегрессионной условной гетероскедастичности.

### 1 Введение

Одна из важнейших целей анализа временных рядов – построение прогнозов. Перечислим основные аспекты, влияющие на этот процесс:

- характер величин, которые прогнозируются;
- исходные данные для прогноза;
- статистическая модель, описывающая данные;
- метод, которым оценивается модель;
- цели, преследуемые при прогнозировании;
- характер прогноза (точечный, интервальный или плотностной);
- вид прогнозной функции.

Варьируя указанные аспекты, можно сделать задачу получения прогноза сколь угодно сложной. Фактически, не представляет особого труда сделать данную задачу практически нерешаемой. В связи с этим неизбежно приходится делать различные упрощающие предположения. Обсудим по очереди разные предположения, которые обычно делают.

Классическое прогнозирование исходит из некоторой достаточно точно заданной параметрической модели. Соответственно, при этом обычно применяются стандартные методы параметрического оценивания (МНК, ММП, ОММ). С другой стороны, достаточно разработаны методы прогнозирования для нечетко заданных моделей данных, основанные на непараметрическом оценивании<sup>1</sup>.

Как правило, рассматривается оптимальный в некотором смысле прогноз, который выбирается из некоторого семейства прогнозных функций. Оптимальность (точечного) прогноза

<sup>\*</sup>Цитировать как: Цыплаков, Александр (2006) «Введение в прогнозирование в классических моделях временных рядов», Квантиль, №1, стр. 3–19. Citation: Tsyplakov, Alexander (2006) “Introduction to prediction in classical time series models,” *Quantile*, No.1, pp. 3–19.

<sup>†</sup>Адрес: 630090, г. Новосибирск, Весенний проезд, 6–44. Электронная почта: [tsy@academ.org](mailto:tsy@academ.org)

<sup>1</sup>Яркий пример прогнозирования без конкретной модели – прогнозирование при помощи искусственных нейронных сетей.

рассматривается с точки зрения некоторой *функции потерь*, показывающей «потери», возникающие из-за того, что прогноз отклоняется от фактически реализовавшегося значения прогнозируемой величины. Чаще всего в качестве функции потерь берется квадрат ошибки прогноза, а прогноз выбирается среди функций общего вида или среди линейных функций.

Выбор линейной прогнозной функции и квадрата в качестве функции потерь – это наиболее спорные предположения классического прогнозирования. Оптимальный линейный прогноз может быть далеким от оптимального прогноза более общего вида. Функция же потерь по смыслу должна зависеть от того, к чему стремится человек, делающий прогноз, а его цели могут плохо описываться квадратом ошибки<sup>2</sup>.

Еще два стандартных упрощения состоят в том, что при расчете оптимального прогноза предполагается, во-первых, что параметры модели известны (хотя на самом деле они оцениваются), а во-вторых, что полностью («с начала времен») известна предыстория предсказываемого процесса (хотя на самом деле каждый раз известен только конечный ряд). Те же предположения, как правило, используются и при расчете интервальных и плотностных прогнозов.

Эти упрощающие предположения следует рассматривать как асимптотические приближения, то есть они оказываются корректными в пределе, при стремлении длины временного ряда, по которому делается прогноз, к бесконечности. Ясно, что на практике ряд может быть коротким и такое асимптотическое приближение – не очень точным.

## 2 Оптимальное в среднеквадратическом смысле прогнозирование: общие принципы

### 2.1 Условное ожидание как оптимальный прогноз

Предположим, что строится прогноз некоторой одномерной случайной величины  $y$  на основе некоторой информации (например, на основе набора других случайных величин),  $\mathcal{H}$ , и что точность прогноза при этом оценивается на основе среднего квадрата ошибки прогноза  $e^f = y - y^f(\mathcal{H})$ , где  $y^f(\mathcal{H})$  – прогнозная функция. Оказывается, что наилучший прогноз в смысле минимума ожидаемых потерь

$$\mathbb{E} \left[ (e^f)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \left( y - y^f(\mathcal{H}) \right)^2 \right].$$

равен математическому ожиданию  $y$ , условному относительно  $\mathcal{H}$ , т.е.  $y^f(\mathcal{H}) = \mathbb{E}[y | \mathcal{H}]$ .

Этот оптимальный прогноз является несмещенным:  $\mathbb{E}[e^f] = 0$ . В связи с этим средний квадрат ошибки прогноза равен дисперсии ошибки прогноза:

$$\mathbb{E} \left[ (e^f)^2 \right] = \mathbb{V}[e^f].$$

Поскольку  $\mathbb{E}[e^f | \mathcal{H}] = 0$ , то ошибка прогноза  $e^f$  некоррелирована с любыми функциями от  $\mathcal{H}$ :

$$\mathbb{E} \left[ e^f g(\mathcal{H}) \right] = 0.$$

### 2.2 Оптимальное линейное прогнозирование

Рассмотрим теперь оптимальный (в смысле минимума среднего квадрата ошибки) *линейный* прогноз. Пусть случайная переменная  $\mathbf{x}$ , на основе которой делается прогноз  $y$ , представляет собой  $n$ -мерный вектор:  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$ . Без потери общности можно предположить, что

<sup>2</sup>В некоторых случаях такие упрощения можно сравнить с ситуацией, когда человек ищет не там, где потерял, а там, где светлее.

$y$  и  $\mathbf{x}$  имеют нулевое математическое ожидание. Будем искать прогноз  $y$  в виде линейной комбинации  $x_j$ :

$$y^f(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \mathbf{x}'\boldsymbol{\alpha},$$

где  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$  – вектор коэффициентов. (Любой прогноз такого вида является несмещенным, поскольку, как мы предположили,  $\mathbb{E}[y] = 0$  и  $\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \mathbf{0}$ .)

Решая задачу минимизации ожидания квадрата ошибки прогноза, получим следующую формулу для коэффициентов прогнозной функции:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}_{xx}^{-1}\mathbf{Q}_{xy},$$

где  $\mathbf{Q}_{xy} = \mathbb{E}[\mathbf{x}y]$  – вектор, состоящий из ковариаций  $x_j$  и  $y$ , а  $\mathbf{Q}_{xx} = \mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}']$  – ковариационная матрица  $\mathbf{x}$ . Таким образом, оптимальный линейный прогноз имеет вид

$$y^f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{Q}_{xx}^{-1}\mathbf{Q}_{xy}. \quad (1)$$

Ошибка оптимального линейного прогноза равна

$$e^f = y - y^f(\mathbf{x}) = y - \mathbf{x}'\boldsymbol{\alpha} = y - \mathbf{x}'\mathbf{Q}_{xx}^{-1}\mathbf{Q}_{xy}.$$

Эта ошибка некоррелирована с  $\mathbf{x}$ , то есть с теми переменными, по которым делается прогноз, т. е.

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}e^f] = 0.$$

Средний квадрат ошибки оптимального прогноза равен

$$\mathbb{E}[(e^f)^2] = \sigma_y^2 - \mathbf{Q}_{yx}\mathbf{Q}_{xx}^{-1}\mathbf{Q}_{xy}, \quad (2)$$

где  $\sigma_y^2 = \mathbb{E}[y^2]$  – дисперсия  $y$ .

Несложно увидеть аналогии между приведенными формулами и формулами МНК.

Для того чтобы применить эти формулы, требуется, чтобы матрица  $\mathbf{Q}_{xx}$  была обратимой. Если она вырождена, то это означает наличие мультиколлинеарности между переменными  $\mathbf{x}$ . Проблема вырожденности решается просто. Во-первых, можно часть «лишних» компонент  $\mathbf{x}$  не использовать – оставить только такие, которые линейно независимы между собой. Во-вторых, в вырожденном случае прогноз можно получить по той же формуле  $y^f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\boldsymbol{\alpha}$ , взяв в качестве коэффициентов  $\boldsymbol{\alpha}$  любое решение системы линейных уравнений  $\mathbf{Q}_{xx}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}_{xy}$  (таких решений в будет бесконечно много). В общем случае, включающем вырожденность, оптимальный линейный прогноз можно записать как

$$y^f(\mathbf{x}) = \mathcal{P}(y | \mathbf{x}), \quad (3)$$

где  $\mathcal{P}(\cdot | \mathbf{x})$  – оператор проекции на подпространство, натянутое на  $\mathbf{x}$ . Средний квадрат ошибки прогноза рассчитывается по формуле

$$\mathbb{E}[(e^f)^2] = \sigma_y^2 - \mathbf{Q}_{yx}\boldsymbol{\alpha}.$$

Вообще говоря, оптимальный линейный прогноз (1) не совпадает с условным математическим ожиданием  $\mathbb{E}[y | \mathbf{x}]$ . Другими словами, он не является оптимальным среди всех возможных прогнозов. Пусть, например, одномерная случайная величина  $x$  имеет стандартное нормальное распределение:  $x \sim N(0, 1)$ , а  $y$  связан с  $x$  формулой  $y = x^2 - 1$ . Тогда, поскольку  $y$  и  $x$  некоррелированы, то  $\boldsymbol{\alpha} = 0$ , и оптимальный линейный прогноз имеет вид  $y^f(x) = 0$  при среднем квадрате ошибки прогноза равном  $\mathbb{E}[(x^2 - 1)^2] = 2$ . В то же время прогноз по нелинейной формуле  $y^f(x) = \mathbb{E}[y | \mathbf{x}] = x^2 - 1$  будет безошибочным (средний квадрат ошибки прогноза равен нулю).

### 2.3 Линейное прогнозирование стационарного временного ряда

Пусть  $y_t$  – слабо стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием. Рассмотрим построение оптимального линейного прогноза этого процесса, если в момент  $t$  известны значения ряда начиная с момента 1, т.е. только конечный ряд  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_t)'$ . Предположим, что делается прогноз на  $h$  шагов вперед, т.е. прогноз величины  $y_{t+h}$ . Для получения оптимального линейного (по  $\mathbf{y}$ ) прогноза можно воспользоваться формулой (1). В случае стационарного временного ряда ее можно переписать в виде:

$$y_t \langle h \rangle = \mathcal{P}(y_{t+h} | \mathbf{y}) = \mathbf{y}' \mathbf{\Gamma}_t^{-1} \boldsymbol{\gamma}^{t,h}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{\Gamma}_t = (\gamma_{|i-j|})_{\substack{i=1, \dots, t \\ j=1, \dots, t}}$$

есть автоковариационная матрица ряда  $(y_1, \dots, y_t)$ , а вектор  $\boldsymbol{\gamma}^{t,h}$  составлен из ковариаций  $y_{t+h}$  с  $(y_1, \dots, y_t)$ , т.е.

$$\boldsymbol{\gamma}^{t,h} = (\gamma_{t+h-1}, \dots, \gamma_h)'$$

(Можно заметить, что автоковариации здесь нужно знать только с точностью до множителя. Например, их можно заменить автокорреляциями.)

Рассмотрим особо прогнозирование на один шаг вперед. Обозначим через  $\boldsymbol{\gamma}^t$  вектор, составленный из ковариаций  $y_{t+1}$  с  $(y_1, \dots, y_t)$ , т.е.  $\boldsymbol{\gamma}^t = (\gamma_t, \dots, \gamma_1)' = \boldsymbol{\gamma}^{t,1}$ . Коэффициенты  $\alpha_i^t$ , минимизирующие средний квадрат ошибки прогноза, задаются нормальными уравнениями  $\mathbf{\Gamma}_t \boldsymbol{\alpha}^t = \boldsymbol{\gamma}^t$ . Прогноз имеет вид

$$y_t \langle 1 \rangle = \mathbf{y}' \mathbf{\Gamma}_t^{-1} \boldsymbol{\gamma}^t = \mathbf{y}' \boldsymbol{\alpha}^t = \sum_{i=1}^t \alpha_i^t y_{t-i},$$

Применив (2) получим, что средний квадрат ошибки прогноза  $e_{t+1}^f = y_{t+1} - y_t \langle 1 \rangle$  равен

$$\mathbb{E} \left[ (e_{t+1}^f)^2 \right] = \gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}^{t'} \boldsymbol{\alpha}^t = \gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}^{t'} \mathbf{\Gamma}_t^{-1} \boldsymbol{\gamma}^t = |\mathbf{\Gamma}_{t+1}| / |\mathbf{\Gamma}_t|. \quad (5)$$

При использовании приведенных формул на практике возникает трудность, связанная с тем, что обычно теоретические автоковариации  $\gamma_k$  неизвестны. Требуется каким-то образом получить оценки автоковариаций. Обычные выборочные автоковариации  $s_k$  здесь не подойдут, поскольку при больших  $k$  (сопоставимых с длиной ряда) они являются очень неточными оценками  $\gamma_k$ . Можно предложить следующий подход<sup>3</sup>.

1. Взять за основу некоторую параметрическую модель временного ряда. (Пусть  $\boldsymbol{\theta}$  – соответствующий вектор параметров). Рассчитать теоретические автоковариации для данной модели в зависимости от параметров:  $\gamma_k = \gamma_k(\boldsymbol{\theta})$ .
2. Оценить параметры на основе имеющихся данных. (Пусть  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  – соответствующие оценки).
3. Получить оценки автоковариаций, подставив  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  в формулы теоретических автоковариаций:  $\gamma_k \approx \gamma_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ .
4. Использовать для прогнозирования формулу (4), заменяя теоретические автоковариации полученными оценками автоковариаций.

<sup>3</sup>Этот подход, в частности, годится для стационарных процессов ARMA. Ниже дается альтернативный способ прогнозирования в рамках модели ARMA.

## 2.4 Прогнозирование по полной предыстории. Разложение Вольда

Если в момент  $t$  известна полная *предыстория*  $\mathcal{H}_t = (y_t, y_{t-1}, \dots)$ , то можно определить соответствующий одношаговый прогноз (прогноз величины  $y_{t+1}$ ) как *предел* прогнозов, полученных на основе конечных рядов  $(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-j})$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Этот прогноз будет оптимальным в среднеквадратическом смысле. Как и в конечномерном случае, можем записать оптимальный линейный прогноз с помощью оператора проекции:

$$y_t \langle 1 \rangle = \mathcal{P}(y_{t+1} | \mathcal{H}_t).$$

Ошибка такого одношагового прогноза,  $e_{t+1}^f$ , называется (линейной, или вольдовской) *инновацией*, поскольку она содержит только новую, неизвестную ранее информацию<sup>4</sup>.

Если рассматривается процесс, для которого  $|\Gamma_t| \neq 0 \forall t$ , то по аналогии с (5) средний квадрат ошибки такого прогноза равен

$$\mathbb{E} \left[ (e_{t+1}^f)^2 \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\Gamma_{t+1}|}{|\Gamma_t|}.$$

Если для подобного процесса  $|\Gamma_t| \neq 0$  для всех  $t$ , и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\Gamma_{t+1}|}{|\Gamma_t|} > 0$ , то для него линейный прогноз сопровождается ошибкой. Такие процессы называют регулярными. В противном случае безошибочный прогноз по полной предыстории возможен. Такие процессы называют сингулярными или (линейно) детерминированными.

Для слабо стационарных рядов выполняются следующие свойства.

**A.** Пусть  $y_t$  – слабо стационарный регулярный процесс. Тогда ошибки одношагового оптимального линейного прогноза по полной предыстории,  $e_t^f$ , являются белым шумом, т. е. имеют нулевое математическое ожидание, не автокоррелированы и имеют одинаковую дисперсию:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ e_t^f \right] &= 0 \text{ при всех } t, \\ \mathbb{E} \left[ e_s^f e_t^f \right] &= 0 \text{ при } s \neq t, \\ \mathbb{E} \left[ (e_t^f)^2 \right] &= \sigma_f^2 \text{ при всех } t. \end{aligned}$$

**B.** Процесс  $y_t$  представим в следующем виде:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i e_{t-i}^f + v_t, \tag{6}$$

где  $\psi_0 = 1$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$ ; процесс  $v_t$  здесь является слабо стационарным, линейно детерминированным<sup>5</sup>. Утверждения A и B составляют *теорему Вольда*. Эта теорема является одним из самых фундаментальных результатов в теории временных рядов. Утверждение B говорит о том, что любой стационарный процесс можно представить в виде скользящего среднего бесконечного порядка,  $MA(\infty)$ , или, другими словами, бесконечного одностороннего линейного фильтра от белого шума, плюс линейно детерминированная компонента. Это так называемое *разложение Вольда*.

Разложение Вольда имеет в своей основе прогнозирование на один шаг вперед. С другой стороны, если мы знаем разложение Вольда для процесса, то с помощью него можно делать прогнозы. Предположим, что в момент  $T$  делается прогноз на  $h$  шагов вперед, т. е. прогноз

<sup>4</sup>Вообще говоря, это будет инновация только в узком линейном смысле. См. ниже обсуждение нелинейного прогнозирования.

<sup>5</sup>Простейший пример линейно детерминированного ряда – это, говоря неформально, «случайная константа», т. е.  $v_t = \xi$ , где  $\xi$  – случайная величина с  $\mathbb{E}[\xi] = 0$ . Кроме того, типичный случай линейно детерминированного ряда – это «случайная синусоида».

величины  $y_{T+h}$  на основе предыстории  $\mathcal{H}_T = (y_T, y_{T-1}, \dots)$ . Сдвинем формулу разложения Вольда (6) на  $h$  периодов вперед:

$$y_{T+h} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i e_{T+h-i}^f + v_{T+h}.$$

Второе слагаемое,  $v_{T+h}$ , можно предсказать без ошибки, зная  $\mathcal{H}_T$ . Из первой суммы первые  $h$  слагаемых не предсказуемы на основе  $\mathcal{H}_T$ . При прогнозировании их можно заменить ожидаемыми значениями – нулями. Из этих рассуждений следует следующая формула прогноза:

$$y_T(h) = \sum_{i=h}^{\infty} \psi_i e_{T+h-i}^f + v_{T+h}. \quad (7)$$

Это будет оптимальный линейный прогноз. Ошибка прогноза при этом будет равна

$$\sum_{i=0}^{h-1} \psi_i e_{T+h-i}^f.$$

Поскольку  $e_t^f$  – белый шум с дисперсией  $\sigma_f^2$ , то средний квадрат ошибки прогноза равен

$$\sigma_f^2 \sum_{i=0}^{h-1} \psi_i^2.$$

Следует понимать, что для многих моделей нелинейный прогноз может быть существенно более точным, чем линейный прогноз, основанный на разложении Вольда. Пусть, например, процесс  $y_t$  задается уравнением  $y_t = \varepsilon_{t-1}^2 - 1 + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t$  – гауссовский белый шум с единичной дисперсией. Такой процесс  $y_t$  слабо стационарен и представляет собой белый шум. Оптимальный линейный прогноз на один шаг вперед равен нулю ( $\mathcal{P}(y_{T+1} | \mathcal{H}_T) = 0$ ), а ошибка прогноза равна  $y_{T+1}$ . Средний квадрат ошибки оптимального линейного прогноза равен, таким образом,  $\mathbb{E}[y_{T+1}^2] = 3$ . В то же время оптимальный прогноз равен  $\mathbb{E}[y_{T+1} | \mathcal{H}_T] = \varepsilon_T^2 - 1$  с ошибкой  $\varepsilon_{T+1}$ . Средний квадрат ошибки оптимального прогноза равен  $\mathbb{E}[\varepsilon_{T+1}^2] = 1$ .

### 3 Прогнозирование по модели Бокса–Дженкинса

Рассмотрим теперь прогнозирование стационарного<sup>6</sup> процесса авторегрессии – скользящего среднего, ARMA( $p, q$ ):

$$y_t = \sum_{j=1}^p \varphi_j y_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad (8)$$

где  $\varepsilon_t$  – белый шум с дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ . С использованием оператора лага  $L$  модель выглядит следующим образом:

$$\left(1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j L^j\right) y_t = \left(1 - \sum_{j=1}^q \theta_j L^j\right) \varepsilon_t.$$

или

$$\varphi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t,$$

<sup>6</sup>Условие стационарности, как известно, состоит в том, чтобы все корни характеристического уравнения  $\varphi(z) = 0$  лежали за пределами единичного круга.

где  $\varphi(L)$  – лаговый многочлен для авторегрессии,  $\theta(L)$  – лаговый многочлен для скользящего среднего.

Поскольку модель  $ARMA(p, q)$  связывает переменные линейным образом, можно ожидать, что прогнозирование в этой модели тесно связано с теорией линейного прогнозирования и с разложением Вольда.

### 3.1 Обратимость скользящего среднего и разложение Вольда

Уравнение чистого процесса скользящего среднего, без авторегрессионной составляющей, по форме напоминает разложение Вольда. Однако оно не всегда является таковым. Условие того, что стандартная запись процесса скользящего среднего является его разложением Вольда состоит в том, что процесс является обратимым, т.е. что все корни характеристического уравнения  $\theta(z) = 0$  лежат за пределами единичного круга на комплексной плоскости (по модулю больше единицы)<sup>7</sup>. При этом ошибка  $\varepsilon_t$  будет вольдовской инновацией.

В смешанной модели авторегрессии – скользящего среднего  $ARMA$  ошибка модели  $\varepsilon_t$  является вольдовской инновацией, если то же условие выполнено для  $MA$ -составляющей.

Для каждого необратимого процесса  $MA(q)$ , у которого корни характеристического уравнения не равны по модулю единице, существует неотличимый от него обратимый процесс того же порядка. Например, процесс  $MA(1)$  с  $|\theta| > 1$  можно записать в виде

$$y_t = \xi_t - \frac{1}{\theta} \xi_{t-1},$$

где  $\xi_t = \frac{1-\theta L}{1-1/\theta L} \varepsilon_t$  является белым шумом. В общем случае процесса  $ARMA(p, q)$ , чтобы сделать его обратимым, требуется обратить все корни характеристического уравнения  $\theta(z) = 0$ , которые по модулю меньше единицы (и поправить соответствующим образом дисперсию).

Эта операция обращения корней позволяет получить разложение Вольда произвольного процесса  $ARMA(p, q)$ . Разложение Вольда необратимого процесса, у которого некоторые корни характеристического уравнения по модулю больше единицы, такое же, как у эквивалентного обратимого процесса. Ошибки однопериодных прогнозов, лежащие в основе разложения Вольда, при этом не будут совпадать с ошибками модели  $\varepsilon_t$ .

Произвольный стационарный процесс  $ARMA$  можно записать в виде скользящего среднего бесконечного порядка,  $MA(\infty)$ :

$$y_t = \frac{\theta(L)}{\varphi(L)} \varepsilon_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} = \psi(L) \varepsilon_t, \quad (9)$$

где  $\psi_0 = 1$ . Если процесс  $ARMA$  является обратимым, то полученное представление в виде  $MA(\infty)$  является разложением Вольда этого процесса<sup>8</sup>.

Коэффициенты разложения  $\psi_i$  удовлетворяют соотношению

$$\psi_i = \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_{t-i} y_t]}{\sigma_\varepsilon^2}.$$

Они представляют собой *функцию импульсного отклика* для процесса  $ARMA$ , т.е.  $\psi_i$  является количественным измерителем того, как небольшое изменение («импульс») в инновации  $\varepsilon_t$  влияет на  $y$  через  $i$  периодов, т.е. на  $y_{t+i}$ , что можно символически записать как

$$\psi_i = \frac{dy_{t+i}}{d\varepsilon_t}.$$

<sup>7</sup>Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что корни, модуль которых равен единице, отсутствуют.

<sup>8</sup>Из вышесказанного ясно, что хотя разложение Вольда представляет процесс в виде  $MA(\infty)$ , модель  $MA(\infty)$  не обязательно задает разложение Вольда.

Простой способ вычисления функции реакции на импульсы состоит в том, чтобы продифференцировать уравнение ARMA-процесса сдвинутое на  $i$  периодов вперед

$$y_{t+i} = \sum_{j=1}^p \varphi_j y_{t+i-j} + \varepsilon_{t+i} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t+i-j}$$

по  $\varepsilon_t$ :

$$\frac{dy_{t+i}}{d\varepsilon_t} = \sum_{j=1}^p \varphi_j \frac{dy_{t+i-j}}{d\varepsilon_t} - \theta_i,$$

где используется  $\theta_0 = -1$  и  $\theta_j = 0$  при  $j > q$ . Таким образом, получим рекуррентную формулу для  $\psi_i = dy_{t+i}/d\varepsilon_t$ :

$$\psi_i = \sum_{j=1}^p \varphi_j \psi_{i-j} - \theta_i. \quad (10)$$

При расчетах по этой формуле следует положить  $\psi_0 = 1$  и  $\psi_i = 0$  при  $i < 0$ .

### 3.2 Прогнозирование стационарного процесса ARMA

Пусть для стационарного обратимого<sup>9</sup> ARMA-процесса  $y$  в момент  $T$  делается линейный прогноз процесса на  $h$  шагов вперед, т. е. прогноз величины  $y_{T+h}$ . Для упрощения рассуждений предположим, что при прогнозировании доступна вся информация о процессе  $y$  до момента  $T$  включительно, т. е. информация, на основе которой строится прогноз, совпадает с полной предысторией процесса,

$$\mathcal{H}_T = (y_T, y_{T-1}, \dots).$$

Если процесс ARMA обратим, то на основе  $(y_T, y_{T-1}, \dots)$  можно однозначно определить ошибки  $(\varepsilon_T, \varepsilon_{T-1}, \dots)$ , используя представление модели ARMA в виде AR( $\infty$ ):

$$\frac{\varphi(L)}{\theta(L)} y_t = \pi(L) y_t = \varepsilon_t.$$

Таким образом, при сделанных предположениях эти ошибки, фактически, входят в информационное множество<sup>10</sup>. Кроме того, имея полную предысторию, можно точно вычислить параметры процесса, поэтому будем далее исходить из того, что *параметры процесса нам известны*.

Воспользуемся соответствующим разложением Вольда (9). Согласно (7) оптимальный линейный прогноз на  $h$  периодов вперед, сделанный в момент  $T$ , имеет вид

$$y_T\langle h \rangle = \psi_h \varepsilon_T + \psi_{h+1} \varepsilon_{T-1} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{h+i} \varepsilon_{T-i}. \quad (11)$$

С учетом того, что  $y_{T+h} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{T+h-i}$ , ошибка такого прогноза  $e_T\langle h \rangle$  равна

$$e_T\langle h \rangle = y_{T+h} - y_T\langle h \rangle = \sum_{i=0}^{h-1} \psi_i \varepsilon_{T+h-i}, \quad (12)$$

<sup>9</sup>Если он исходно необратим, то требуется сначала привести его к обратимому виду обращением корней.

<sup>10</sup>Для необратимого процесса это не так, т. е. представление AR( $\infty$ ) не существует и по ряду невозможно вычислить ошибки.

а средний квадрат ошибки прогноза равен

$$\mathbb{E}[e_T\langle h \rangle^2] = \sigma_\varepsilon^2 \left[ 1 + \sum_{i=1}^{h-1} \psi_i^2 \right] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{h-1} \psi_i^2,$$

где мы положили  $\psi_0 = 0$ .

Из (12) видно, что ошибка прогноза проистекает из будущих инноваций  $\varepsilon_{T+k}$ , которые в момент  $T$  еще неизвестны. Беря математическое ожидание от обеих частей, видим, что математическое ожидание ошибки прогноза равно нулю. Таким образом, прогноз (11) будет *несмещенным*.

Из несмещенности прогноза следует, что дисперсия ошибки прогноза равна среднему квадрату ошибки прогноза, т. е.

$$\sigma^2\langle h \rangle = \mathbb{E}[e_T\langle h \rangle^2] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{h-1} \psi_i^2. \quad (13)$$

Хотя представление в виде бесконечного скользящего среднего (11) удобно для теоретического анализа прогнозирования, однако для вычисления прогноза предпочтительнее использовать рекуррентную формулу<sup>11</sup>, подобную исходному представлению модели ARMA.

Введем обозначения

$$\bar{y}_{T+i} = \mathcal{P}(y_{T+i} | \mathcal{H}_T) = \begin{cases} y_{T+i}, & i \leq 0, \\ y_T\langle i \rangle, & i > 0, \end{cases}$$

и

$$\bar{\varepsilon}_{T+i} = \mathcal{P}(\varepsilon_{T+i} | \mathcal{H}_T) = \begin{cases} \varepsilon_{T+i}, & i \leq 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

В этих обозначениях

$$y_T\langle h \rangle = \bar{y}_{T+h} = \sum_{j=1}^p \varphi_j \bar{y}_{T+h-j} + \bar{\varepsilon}_{T+h} - \sum_{j=1}^q \theta_j \bar{\varepsilon}_{T+h-j}. \quad (14)$$

Формула строится на основе базового уравнения модели ARMA, сдвинутого на  $h$  периодов вперед, применением к нему оператора проекции  $\mathcal{P}(\cdot | \mathcal{H}_T)$ : в нем неизвестные на момент  $T$  величины  $y_{T+i}$  заменяются их прогнозами  $y_T\langle i \rangle$ , а неизвестные инновации  $\varepsilon_{T+i}$  заменяются нулями.

Прогноз по (14) и (11) является наилучшим среди линейных прогнозов для произвольного стационарного обратимого процесса ARMA, у которого ошибки представляют собой белый шум. Если выполнено

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{t+1} | \mathcal{H}_t] = 0, \quad (15)$$

то такой прогноз будет равен условному по предыстории ожиданию прогнозируемой величины, т. е.

$$y_T\langle h \rangle = \mathbb{E}[y_{T+h} | \mathcal{H}_T],$$

и поэтому будет наилучшим среди *всех* прогнозных функций. При этом величины  $\bar{y}_{T+i}$  и  $\bar{\varepsilon}_{T+i}$  в (14) будут являться условными относительно  $\mathcal{H}_T$  ожиданиями:

$$\bar{y}_{T+i} = \mathbb{E}[y_{T+i} | \mathcal{H}_T] \quad \text{и} \quad \bar{\varepsilon}_{T+i} = \mathbb{E}[\varepsilon_{T+i} | \mathcal{H}_T].$$

<sup>11</sup>Она следует из (11) и рекуррентного соотношения для функции реакции на импульсы (10).

Условие (15) будет выполнено, например, если все ошибки  $\varepsilon_t$  независимы между собой. Отсутствия автокорреляции здесь недостаточно<sup>12</sup>.

Если дополнительно предположить, что ошибки  $\varepsilon_t$  подчиняются нормальному закону (т. е. представляют собой гауссовский белый шум), то можно получить также интервальный прогноз. При этом предположении распределение ошибки прогноза (12) также будет нормальным со средним значением 0 и дисперсией  $\sigma^2\langle h \rangle$ :

$$e_T\langle h \rangle = y_{T+h} - y_T\langle h \rangle \sim N(0, \sigma^2\langle h \rangle)$$

Учитывая это, получаем доверительный интервал для  $y_{T+h}$ , т. е. интервальный прогноз:

$$[y_T\langle h \rangle - z_\alpha\sigma\langle h \rangle, y_T\langle h \rangle + z_\alpha\sigma\langle h \rangle]$$

или

$$\left[ y_T\langle h \rangle - z_\alpha\sigma_\varepsilon \sqrt{\sum_{i=0}^{h-1} \psi_i^2}, y_T\langle h \rangle + z_\alpha\sigma_\varepsilon \sqrt{\sum_{i=0}^{h-1} \psi_i^2} \right], \quad (16)$$

где  $z_\alpha$  – двусторонний  $\alpha$ -квантиль стандартного нормального распределения. Это прогнозный интервал с уровнем доверия  $\alpha$ .

### 3.3 Прогнозирование процесса ARMA с детерминированными регрессорами

Детерминированные регрессоры (константа, тренд и т. п.) можно включать в ARMA двумя разными способами. Во-первых, это может быть линейная регрессия с ARMA-процессом в ошибке:

$$y_t = \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta} + u_t,$$

где  $\mathbf{X}_t$  – вектор-строка наблюдений для регрессоров,  $\boldsymbol{\beta}$  – вектор-столбец коэффициентов регрессии,  $u_t$  – ARMA-процесс, задаваемый уравнением (8) с заменой  $y_t$  на  $u_t$ . Во-вторых, это может быть процесс ARMAX:

$$y_t = \sum_{j=1}^p \varphi_j y_{t-j} + \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}. \quad (17)$$

В модели регрессии с ARMA-ошибкой сначала вычисляется прогноз для  $u_{T+h}$ ,  $u_T\langle h \rangle$ , а затем этот прогноз подставляется в уравнение регрессии:

$$y_T\langle h \rangle = \mathbf{X}_{T+h}\boldsymbol{\beta} + u_T\langle h \rangle.$$

Значения  $\mathbf{X}_{T+h}$  при этом предполагается известными. Для процесса ARMAX рекуррентная формула прогноза будет строиться по аналогии с (14):

$$y_T\langle h \rangle = \bar{y}_{T+h} = \mathbf{X}_{T+h}\boldsymbol{\beta} + \sum_{j=1}^p \varphi_j \bar{y}_{T+h-j} + \bar{\varepsilon}_{T+h} - \sum_{j=1}^q \theta_j \bar{\varepsilon}_{T+h-j}. \quad (18)$$

В обоих случаях показатели точности прогноза можно найти по тем же формулам, что и для ARMA, «забывая» о детерминированных регрессорах.

<sup>12</sup>Например, если при нечетных  $t$  ошибки  $\varepsilon_t$  представляют собой гауссовский белый шум с единичной дисперсией, а при четных вычисляются по формуле  $\varepsilon_t = (\varepsilon_{t-1}^2 - 1)/\sqrt{2}$ , то  $\varepsilon_t$  будет слабо стационарным белым шумом, но условие (15) не будет выполнено для нечетных  $t$ . При этом  $y_{t+1}$  будет без ошибки прогнозироваться на основе  $\mathcal{H}_t$ .

### 3.4 Прогнозирование процесса ARIMA

Рассмотрим теперь два эквивалентных способа прогнозирования интегрированного процесса авторегрессии – скользящего среднего ARIMA( $p, d, q$ ):

$$\varphi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)\varepsilon_t. \quad (19)$$

(Ряд  $y_t$  называют интегрированным, поскольку он является результатом применения к стационарному ряду  $w_t = (1-L)^d y_t$  операции накопленной суммы  $d$  раз.)

Первый способ заключается в том, чтобы воспользоваться представлением ARIMA( $p, d, q$ ) в виде ARMA( $p+d, q$ ):

$$\tilde{\varphi}(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t,$$

где

$$\tilde{\varphi}(L) = \varphi(L)(1-L)^d.$$

Далее применяются те же формулы, что и выше для стационарного ряда ARMA. Конечно, использование подобного трюка требует дополнительного теоретического обоснования, но формулы и в самом деле корректны (за исключением формул (9) и (11), которые содержат расходящиеся ряды).

Другой способ прогнозирования в модели ARIMA( $p, d, q$ ) состоит в том, чтобы вычислить нужные величины для  $w_t = (1-L)^d y_t$ , т. е. стационарного процесса ARMA( $p, q$ ), который лежит в основе прогнозируемого процесса ARIMA( $p, d, q$ ), а потом на их основе получить соответствующие показатели для  $y_t$ . Пусть имеются прогнозы  $w_T\langle h \rangle$  и функция реакции на импульсы  $\psi_i^w$  для  $w_t$ . Надо применить к полученным величинам оператор  $(1-L)^{-d}$ , т. е. попросту говоря, просуммировать ряды  $w_T\langle h \rangle$  и  $\psi_i^w$   $d$  раз, добавляя каждый раз нужную константу суммирования. В частности, при  $d = 1$  получаем

$$y_T\langle h \rangle = y_T + \sum_{j=0}^h w_T\langle j \rangle \quad \text{и} \quad \psi_i = \sum_{j=0}^i \psi_j^w.$$

### 3.5 Прогнозирование по модели Бокса–Дженкинса в конечных выборках

Выше мы предполагали, что в момент  $T$  известна полная предыстория  $\mathcal{H}_T = (y_T, y_{T-1}, \dots)$ . Фактически, однако, человеку, производящему прогноз, известен только некоторый конечный ряд  $(y_1, \dots, y_T)$ . В связи с этим для практического использования приведенных формул требуется внести в них определенные поправки.

В частности, параметры модели на практике не известны, и их требуется оценить. Это вносит дополнительную ошибку в прогноз. Из-за того, что параметры не известны, а оцениваются, дисперсия ошибки прогноза будет выше, чем следует из (13). Имея некоторую оценку ковариационной матрицы оценок параметров можно было бы внести приблизительную поправку, но эти расчеты являются достаточно громоздкими.

Кроме того, ошибки  $\varepsilon_t$ , вообще говоря, неизвестны, и вместо них в выражении (14) следует использовать остатки  $e_t$ , полученные в результате оценивания модели. При наличии в модели скользящего среднего (т. е. при  $q > 0$ ) ошибки не выражаются однозначно через наблюдаемый ряд  $y$  и требуется использовать какое-то приближение. Наиболее простой метод состоит в том, чтобы положить остатки  $e_t$  при  $t \leq 0$  равными нулю, а остальные остатки вычислять рекуррентно, пользуясь формулой

$$e_t = y_t - \sum_{j=1}^p \hat{\varphi}_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j e_{t-j},$$

где вместо ошибок  $\varepsilon_t$  используются остатки  $e_t$ , а вместо неизвестных истинных параметров  $\hat{\varphi}_j$  и  $\hat{\theta}_j$  – их оценки.

Далее, расчеты дисперсии прогноза с использованием (13) сами по себе являются приближенными, поскольку встречающиеся там величины приходится оценивать. Это относится и к функции реакции на импульсы  $\psi_i$ , и к дисперсии ошибки  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Можно также использовать для прогнозирования в модели Бокса–Дженкинса и тот подход, который описан в разделе 2.3. Однако это помогает решить только одну из указанных проблем – проблему с тем, что ошибки не выражаются однозначно через наблюдаемый ряд при  $q > 0$ .

#### 4 Прогнозы в модели GARCH

Классическая модель GARCH( $p, q$ ) для ряда  $\varepsilon_t$  имеет вид:

$$\varepsilon_t \mid \mathcal{H}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (20a)$$

и

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \delta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2, \quad (20b)$$

где  $\mathcal{H}_{t-1} = (\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$  – предыстория,  $\sigma_t^2$  – условная дисперсия ряда. При этом предполагается, что  $\omega > 0$ ,  $\delta_1, \dots, \delta_p \geq 0$  и  $\gamma_1, \dots, \gamma_q \geq 0$ .

Для того чтобы безусловная дисперсия была конечной, требуется

$$\sum_{j=1}^p \delta_j + \sum_{j=1}^q \gamma_j < 1.$$

При этом GARCH-процесс слабо стационарен, и безусловная дисперсия равна

$$\frac{\sigma^2}{1 - \sum_{j=1}^p \delta_j - \sum_{j=1}^q \gamma_j}.$$

Таким образом, с точки зрения безусловной дисперсии GARCH-процесс гомоскедастичен. Кроме того, он не автокоррелирован и поэтому является белым шумом.

Как несложно понять,  $\mathbb{E}[\varepsilon_{t+h} \mid \mathcal{H}_t] = 0$ , поэтому оптимальным в среднеквадратическом смысле прогнозом для чистого процесса GARCH( $p, q$ ) будет ноль. Какую же пользу для прогнозирования можно извлечь из того факта, что процесс является не просто белым шумом, а белым шумом с авторегрессионной условной гетероскедастичностью? Если цель прогнозирования состоит в получении *точечного* прогноза, минимизирующего средний квадрат ошибки, то прямая польза не очень большая. Учет авторегрессионной условной гетероскедастичности может опосредованно помочь получить более точный прогноз, поскольку позволяет более точно оценить параметры модели, но при большом количестве наблюдений такое улучшение будет не очень заметным.

Однако авторегрессионную условную гетероскедастичность очень важно учитывать при построении *интервальных и плотностных* прогнозов. В обычных моделях временного ряда с неизменными условными дисперсиями (например, ARMA) неопределенность ошибки прогноза – это некоторая возрастающая функция горизонта прогноза, которая (если прогноз строится по полной предыстории) не зависит от момента прогноза. Однако в присутствии GARCH-ошибок точность прогноза будет нетривиально зависеть от текущей информации и, следовательно, от момента прогноза. Поэтому для корректного построения интервальных прогнозов, условных по предыстории, требуется иметь оценки будущих условных дисперсий ошибки.

Кроме того, в некоторых случаях полезно иметь прогнозы не только (условного) математического ожидания изучаемой переменной, но и ее (условной) дисперсии. Это важно, например, при принятии решений об инвестициях в финансовые активы. В этом случае дисперсию (волатильность) доходности естественно рассматривать как меру рискованности финансового актива. Таким образом, сами по себе прогнозы условной дисперсии могут иметь практическое применение.

Рассмотрим модель линейной регрессии,

$$y_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t,$$

в которой ошибка представляет собой GARCH-процесс. В такой модели условное математическое ожидание моделируется с помощью модели линейной регрессии (это позволяет учитывать линейный тренд, детерминированные сезонные переменные и т. п.), а условная дисперсия – с помощью модели GARCH<sup>13</sup>. Пусть доступна вся информация до момента  $T$  включительно:  $\mathcal{H}_T = (y_T, \mathbf{X}_T, y_{T-1}, \mathbf{X}_{T-1}, \dots)$ . При этом мы будем исходить из того, что нам известны истинные параметры процесса.

Оптимальный прогноз на  $h$  периодов – это математическое ожидание прогнозируемой величины  $y_{T+h}$ , условное относительно имеющейся на момент  $T$  информации  $\mathcal{H}_T$ . Поскольку  $\mathbb{E}[\varepsilon_{T+h} | \mathcal{H}_T] = 0$ , то такой прогноз равен

$$y_T \langle h \rangle = \mathbb{E}[y_{T+h} | \mathcal{H}_T] = \mathbf{X}_{T+h} \boldsymbol{\beta}.$$

Таким образом, если известны истинные параметры, присутствие GARCH-ошибок не отражается на том, как строится точечный прогноз, – он оказывается таким же, как для обычной линейной регрессии. Ошибка предсказания равна соответствующей инновации процесса:

$$\varepsilon_T \langle h \rangle = y_{T+h} - y_T \langle h \rangle = \varepsilon_{T+h}.$$

Прогноз является несмещенным как безусловно, так и условно относительно предыстории.

Покажем, что в линейной регрессии с GARCH-ошибкой доверительный интервал прогноза зависит от предыстории. Условная дисперсия ошибки предсказания, которую мы будем обозначать через  $\sigma_T^2 \langle h \rangle$ , равна ожидаемому значению квадрата соответствующей инновации (тоже условному):

$$\sigma_T^2 \langle h \rangle = \mathbb{V}[\varepsilon_T \langle h \rangle | \mathcal{H}_T] = \mathbb{E}[\varepsilon_T \langle h \rangle^2 | \mathcal{H}_T] = \mathbb{E}[\varepsilon_{T+h}^2 | \mathcal{H}_T].$$

Из этого следует, что она зависит, как от горизонта прогноза,  $h$ , так и от предыстории  $\mathcal{H}_T$ . Кроме того, фактически, дисперсия ошибки прогноза – это прогноз волатильности на  $h$  шагов вперед:

$$\sigma_T^2 \langle h \rangle = \mathbb{E}[\varepsilon_{T+h}^2 | \mathcal{H}_T] = \mathbb{E}[\sigma_{T+h}^2 | \mathcal{H}_T].$$

Возьмем от обеих частей рекуррентного уравнения для GARCH-процесса (20b) математическое ожидание, условное относительно  $\mathcal{H}_T$ . Получим

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2 | \mathcal{H}_T] = \omega + \sum_{j=1}^p \delta_j \mathbb{E}[\sigma_{t-j}^2 | \mathcal{H}_T] + \sum_{j=1}^q \gamma_j \mathbb{E}[\varepsilon_{t-j}^2 | \mathcal{H}_T]. \quad (21)$$

Можно использовать эту рекуррентную формулу для расчета  $\mathbb{E}[\sigma_t^2 | \mathcal{H}_T]$  при  $t > T$ . При этом следует учесть, что  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2 | \mathcal{H}_T] = \varepsilon_t^2$  при  $t \leq T$ , поскольку информация о  $\varepsilon_t$  содержится

<sup>13</sup>С точки зрения прогнозирования перспективной является модель, сочетающая ARIMA с GARCH. Модель ARIMA в этом случае используется для моделирования поведения условного математического ожидания ряда, а GARCH – для моделирования условной дисперсии.

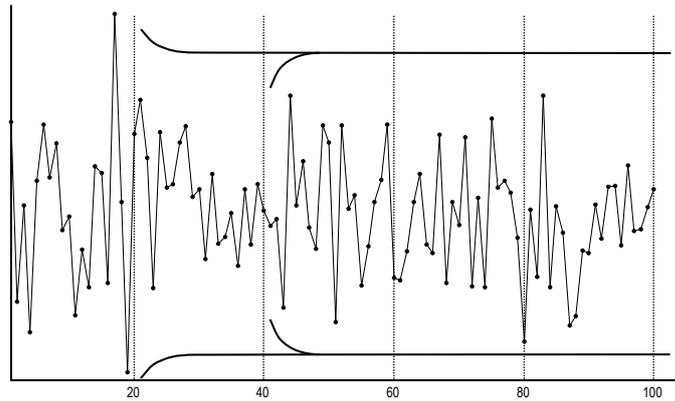


Рис. 1: Прогнозы по модели GARCH(1,1)

в информационном множестве  $\mathcal{H}_T$ , и по аналогичной причине  $\mathbb{E}[\sigma_t^2 | \mathcal{H}_T] = \sigma_t^2$  при  $t \leq T+1$ . Кроме того, как мы только что доказали  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2 | \mathcal{H}_T] = \mathbb{E}[\sigma_t^2 | \mathcal{H}_T]$  при  $t > T$ .

Таким образом, имеются все данные для того, чтобы с помощью формулы (21) рассчитать условную дисперсию ошибки прогноза для  $y_{T+h}$  в модели GARCH. При  $h = 1$  можно сразу записать, без применения (21), что

$$\sigma_T^2\langle 1 \rangle = \mathbb{E}[\sigma_{T+1}^2 | \mathcal{H}_T] = \sigma_{T+1}^2,$$

где  $\sigma_{T+1}^2$  рассчитывается по обычному правилу. В модели GARCH(1,1) из (21) следует, что общее выражение для дисперсии ошибки прогноза при  $h > 1$  (не подходящее только для случая  $\delta_1 + \gamma_1 = 1$ ) имеет вид

$$\sigma_T^2\langle h \rangle = \omega \frac{1 - (\delta_1 + \gamma_1)^{h-1}}{1 - \delta_1 - \gamma_1} + (\delta_1 + \gamma_1)^{h-1} \sigma_{T+1}^2.$$

В пределе в ситуации стационарности (т.е. при  $\delta_1 + \gamma_1 < 1$ ) условная дисперсия ошибки прогноза сходится к безусловной дисперсии процесса GARCH(1,1):

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sigma_T^2\langle h \rangle = \frac{\omega}{1 - \delta_1 - \gamma_1}.$$

Хотя мы можем вычислить дисперсию ошибки прогноза, этого, вообще говоря, недостаточно для корректного построения доверительных интервалов, поскольку при  $h > 1$  условное относительно  $\mathcal{H}_T$  распределение  $\varepsilon_{T+h}$ , а, следовательно, и распределение ошибки прогноза  $\varepsilon_T\langle h \rangle$ , имеет более толстые хвосты, чем нормальное распределение. Чтобы обойти эту проблему, можно использовать, например, прогнозные интервалы в виде плюс/минус двух среднеквадратических ошибок прогноза без выяснения того, какой именно доверительной вероятности это соответствует<sup>14</sup>.

Чтобы проиллюстрировать зависимость доверительных интервалов прогнозов от предыстории, мы сгенерировали ряд GARCH(1,1) длиной 100 с параметрами  $\delta_1 = 0.3$  и  $\gamma_1 = 0.3$  и построили теоретические доверительные интервалы при  $T = 20$  и  $T = 40$ . Прогноз везде равен нулю. Рис. 1 показывает условные доверительные интервалы прогнозов для нашего процесса GARCH(1,1), а также сам ряд. Интервал для  $T = 20$  постепенно сужается, а для  $T = 40$  – расширяется до уровня, соответствующего безусловной дисперсии. Такое поведение объясняется тем, что при  $T = 21$  волатильность (условная дисперсия) была относительно высокой, а при  $T = 41$  – относительно низкой. Очевидна способность условных прогнозных интервалов приспосабливаться к изменениям в волатильности. Примечательно то, что

<sup>14</sup>Ясно, что для нормального распределения это примерно 95%-й двусторонний квантиль.

интервалы прогнозов могут сужаться с ростом горизонта прогнозов, если прогноз делается в момент, соответствующий высокому уровню волатильности. Это объясняется тем, что в будущем следует ожидать снижения (ожидаемого) уровня волатильности.

На практике следует внести изменения в приведенные выше формулы, которые выведены в предположении, что истинные параметры процесса известны. Все параметры заменяются соответствующими оценками. Можно также добавить к дисперсии прогноза поправку, связанную с тем, что при прогнозировании используются оценки  $\hat{\beta}$ , а не истинные коэффициенты регрессии  $\beta$ . Это добавка равна приблизительно

$$\mathbf{X}_{T+h} \mathbb{V}[\hat{\beta}]^{-1} \mathbf{X}'_{T+h}.$$

Вместо неизвестной ковариационной матрицы оценок коэффициентов,  $\mathbb{V}[\hat{\beta}]$ , следует взять ее оценку, получаемую в методе максимального правдоподобия.

## 5 Прогнозирование с помощью векторной авторегрессии

Пусть  $\mathbf{Y}_t$  – вектор-строка изучаемых переменных,  $\mathbf{X}_t$  – вектор-строка детерминированных регрессоров (в него может входить константа, тренд, сезонные переменные и т.п.). Как и системы одновременных уравнений, модели *векторной авторегрессии* (VAR) имеют две формы записи: структурную и приведенную. Для прогнозирования удобнее использовать приведенную форму:

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{j=1}^p \mathbf{Y}_{t-j} \mathbf{\Pi}_j + \mathbf{X}_t \mathbf{D} + \mathbf{U}_t.$$

Здесь все  $\mathbf{Y}_t$  стоят в правых частях уравнений только с лагом, так что непосредственные одновременные связи между ними отсутствуют. Предполагается, что ошибки  $\mathbf{U}_t$  представляют собой векторный белый шум, т.е. они не автокоррелированы и имеют постоянную одномоментную ковариационную матрицу  $\mathbb{V}[\mathbf{U}_t] = \mathbf{\Sigma}$ .

Как и выше при рассмотрении других моделей, будем исходить из того, что нам известны истинные параметры процесса VAR. Пусть известны наблюдения за прогнозируемыми рядами до момента  $T$  включительно. При расчетах удобно действовать так, как если бы была известна вся предыстория:

$$\mathcal{H}_T = (\mathbf{Y}_T, \mathbf{X}_T, \mathbf{Y}_{T-1}, \mathbf{X}_{T-1}, \dots).$$

Сделаем оптимальный линейный прогноз на  $(T+1)$ -й период. Это проекция  $\mathbf{Y}_{T+h}$  на подпространство, натянутое на  $\mathcal{H}_T$ .

Модели чистой авторегрессии (без скользящего среднего) удобны тем, что ошибки приведенной формы  $\mathbf{U}_t$  являются непосредственно вольдовскими инновациями. Чтобы получить формулу прогноза с горизонтом  $h$ , применим к обеим частям уравнения для процесса VAR, сдвинутого на  $h$  периодов вперед, оператор  $\mathcal{P}(\cdot | \mathcal{H}_T)$ . Получим рекуррентную формулу для расчета прогнозов:

$$\mathbf{Y}_{T\langle h \rangle} = \bar{\mathbf{Y}}_{T+h} = \sum_{j=1}^p \bar{\mathbf{Y}}_{T+h-j} \mathbf{\Pi}_j + \mathbf{X}_{T+h} \mathbf{D},$$

где мы ввели обозначение

$$\bar{\mathbf{Y}}_{T+i} = \mathcal{P}(\mathbf{Y}_{T+i} | \mathcal{H}_T) = \begin{cases} \mathbf{Y}_{T+i}, & i \leq 0, \\ \mathbf{Y}_{T\langle i \rangle}, & i > 0, \end{cases}$$

а также воспользовались тем, что  $\mathcal{P}(\mathbf{U}_{T+i} | \mathcal{H}_T) = \mathbf{0}$  при  $i > 0$  (будущие инновации непредсказуемы). Такой прогноз является несмещенным.

Чтобы найти показатели точности прогноза, воспользуемся разложением Вольда для  $\mathbf{Y}_{T+h}$  («забыв» про детерминированные регрессоры):

$$\mathbf{Y}_{T+h} = \mathbf{\Pi}^{-1}(\mathbf{L})\mathbf{U}_{T+h} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{U}_{T+h-i} \mathbf{\Psi}_i.$$

Матрицы коэффициентов разложения  $\mathbf{\Psi}_i$  можно рассчитать рекуррентно:

$$\mathbf{\Psi}_i = \sum_{j=1}^p \mathbf{\Psi}_{i-j} \mathbf{\Pi}_j, \quad i = 1, 2, \dots,$$

начиная с

$$\mathbf{\Psi}_0 = \mathbf{I} \quad \text{и} \quad \mathbf{\Psi}_i = \mathbf{0}_{k \times k}, \quad i < 0.$$

Применим к уравнению разложения Вольда оператор проекции  $\mathcal{P}(\cdot | \mathcal{H}_T)$ :

$$\mathbf{Y}_T \langle h \rangle = \mathcal{P}(\mathbf{Y}_{T+h} | \mathcal{H}_T) = \sum_{i=h}^{\infty} \mathbf{U}_{T+h-i} \mathbf{\Psi}_i.$$

Ошибка прогноза, таким образом, равна

$$\mathbf{E}_T \langle h \rangle = \mathbf{Y}_{T+h} - \mathbf{Y}_T \langle h \rangle = \sum_{i=0}^{h-1} \mathbf{U}_{T+h-i} \mathbf{\Psi}_i.$$

С учетом того, что ошибки  $\mathbf{U}_t$  не автокоррелированы, и их ковариационная матрица равна  $\mathbb{V}[\mathbf{U}_t] = \mathbf{\Sigma}$ , мы можем вычислить ковариационную матрицу ошибки прогноза:

$$\mathbf{\Sigma} \langle h \rangle = \mathbb{E} [\mathbf{E}'_T \langle h \rangle \mathbf{E}_T \langle h \rangle] = \sum_{i=0}^{h-1} \mathbf{\Psi}'_i \mathbb{E} [\mathbf{U}'_{T+h-i} \mathbf{U}_{T+h-i}] \mathbf{\Psi}_i = \sum_{i=0}^{h-1} \mathbf{\Psi}'_i \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Psi}_i.$$

Заметим, что построение прогнозов не требует знания структурной формы модели. Это делает VAR очень удобным инструментом прогнозирования: не требуется анализировать, как взаимосвязаны переменные, какая переменная на какую влияет. Чтобы построить прогноз, достаточно оценить приведенную форму без наложения ограничений обычным МНК.

Однако следует учитывать, что если есть структурная информация, то следует оценивать структурную форму, поскольку это дает более точные оценки. Соответственно, прогнозы будут точнее. При этом сами прогнозы удобнее получать по приведенной форме, рассчитав коэффициенты приведенной формы из оценок коэффициентов структурной формы.

## 6 Дальнейшее чтение

Общие принципы прогнозирования временных рядов рассматриваются в Granger & Newbold (1986) и Hamilton (1994). Теорию разложения Вольда можно найти в Anderson (1971) (русский перевод Андерсон, 1976) и Ширяев (1989). Вариант разложения Вольда для многомерных временных рядов обсуждается в Hannan (1970) (русский перевод Хеннан, 1974), там же даны ссылки на литературу. Классическая книга Бокса и Дженкинса (современное переиздание Box, Jenkins & Reinsel, 1994, русский перевод Бокс & Дженкинс, 1974), популяризовавшая моделирование с помощью моделей ARMA и ARIMA, содержит среди прочего и теорию прогнозирования. Прогнозирование в моделях с условной авторегрессионной гетероскедастичностью обсуждается в Engle & Bollerslev (1986) и Baillie & Bollerslev (1992). Книга Lütkepohl (1991), посвященная векторной авторегрессии, содержит обсуждение прогнозирования в этой модели. И, конечно же, много нового и интересного про прогнозирование читатель может почерпнуть из последующих тематических эссе в этом номере «Квантиля».

## Список литературы

- Бокс, Дж. & Г.М. Дженкинс (1974). Анализ временных рядов: Прогноз и управление. Москва: Мир.
- Ширяев, А.Н. (1989). Вероятность. Москва: Наука.
- Андерсон, Т. (1976). Статистический анализ временных рядов. Москва: Мир.
- Хеннан, Э. (1974). Многомерные временные ряды. Москва: Мир.
- Anderson, T.W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*. New York: Wiley.
- Baillie, R.T. & T. Bollerslev (1992). Prediction in dynamic models with time-dependent conditional variances. *Journal of Econometrics* 52, 91–113.
- Box, G.E.P., G.M. Jenkins & G.C. Reinsel (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Prentice Hall.
- Engle, R.F. & T. Bollerslev (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews* 5, 1–50, 81–87.
- Granger, C.W.J. & P. Newbold (1986). *Forecasting Economic Time Series*. New York: Academic Press.
- Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- Hannan, E.J. (1970). *Multiple Time Series*. Wiley.
- Lütkepohl, H. (1991). *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Berlin: Springer-Verlag.

## Introduction to prediction in classical time series models

**Alexander Tsyplakov**

*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

This essay discusses basic notions of time series prediction and states traditional approaches to prediction in classical Box–Jenkins models, vector autoregressions, and autoregressive models with conditional heteroskedasticity.



# Прогнозирование и импульсные отклики в линейных системах\*

Джон Кохрейн<sup>†</sup>

Университет Чикаго, Чикаго, США

Прогнозирование интересно по ряду причин. Оно рационализирует существование теории временных рядов отдельно от экономической теории. Нетеоретические прогнозы временных рядов часто бывают полезны. Картина прогнозов, наряду с автокорреляционной функцией, является интересной характеристикой временного ряда.

## 1 Прогнозирование ARMA-моделями

Один из наиболее интересных выводов из ARMA моделей – это формирование прогнозов переменной по ее прошлому. То есть, мы хотим знать  $\mathbb{E}[x_{t+j}|I_t]$ , где  $I_t$  – вся информация, имеющаяся в наличии в момент времени  $t$ . Пока что под «всей информацией» подразумеваются все прошлые значения переменной и все прошлые значения инноваций; позже мы уточним, что находится в информационном множестве. Сейчас наша задача – найти

$$\mathbb{E}_t[x_{t+j}] \equiv \mathbb{E}[x_{t+j} | x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots].$$

Нам может быть также интересно, насколько мы уверены в прогнозе, что мы квантифицируем с помощью

$$\mathbb{V}_t[x_{t+j}] \equiv \mathbb{V}[x_{t+j} | x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots].$$

Мы приведем несколько примеров, а затем задумаемся, какие общие принципы за ними стоят.

### AR(1)

Для AR(1),  $x_{t+1} = \phi x_t + \varepsilon_{t+1}$ , так что имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[x_{t+1}] &= \mathbb{E}_t[\phi x_t + \varepsilon_{t+1}] &= \phi x_t, \\ \mathbb{E}_t[x_{t+2}] &= \mathbb{E}_t[\phi^2 x_t + \phi \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}] &= \phi^2 x_t, \\ \mathbb{E}_t[x_{t+k}] &= \dots &= \phi^k x_t. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_t[x_{t+1}] &= \mathbb{V}_t[\phi x_t + \varepsilon_{t+1}] &= \sigma_\varepsilon^2, \\ \mathbb{V}_t[x_{t+2}] &= \mathbb{V}_t[\phi^2 x_t + \phi \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}] &= (1 + \phi^2) \sigma_\varepsilon^2, \\ \mathbb{V}_t[x_{t+k}] &= \dots &= (1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots + \phi^{2(k-1)}) \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Эти траектории условных средних и дисперсий показаны на Рис. 1.

Заметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t[x_{t+k}] = 0 = \mathbb{E}[x_t],$$

\* Настоящее эссе – выдержки из курса лекций автора “Time series for macroeconomics and finance,” читаемых в Университете Чикаго. Перевод С. Анатольева. Цитировать как: Кохрейн, Джон (2006) «Прогнозирование и импульсные отклики в линейных системах», Квантиль, №1, стр. 21–26. Citation: Cochrane, John (2006) “Prediction and impulse responses in linear systems,” Quantile, No.1, pp. 21–26.

<sup>†</sup> Адрес: Graduate School of Business, University of Chicago, 5807 S. Woodlawn, Chicago IL 60637, USA. Электронная почта: john.cochrane@gsb.uchicago.edu

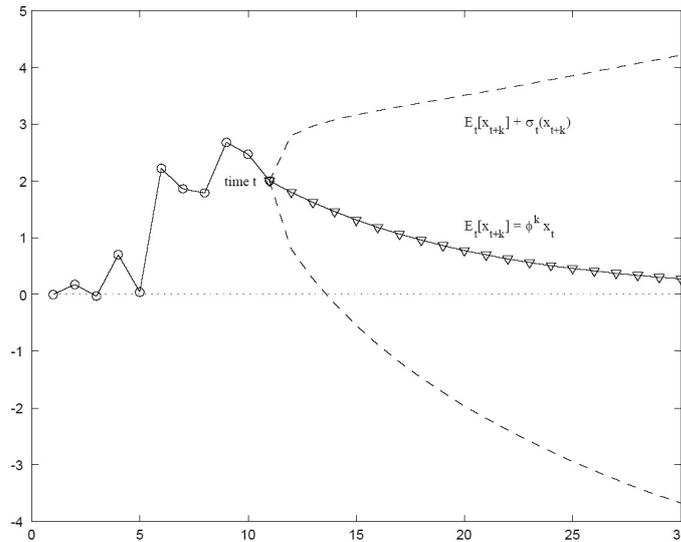


Рис. 1: AR(1): прогноз и стандартное отклонение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{V}_t[x_{t+k}] = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{1 - \phi^2} \sigma_{\varepsilon}^2 = \mathbb{V}[x_t].$$

Таким образом, мы можем рассматривать безусловные моменты как пределы условных моментов  $x_t$  по мере того как  $t \rightarrow -\infty$ , или как пределы условных моментов  $x_{t+j}$  по мере того как горизонт  $j \rightarrow \infty$ .

## МА

Предсказывать МА-модели так же просто. Поскольку

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots,$$

имеем:

$$\mathbb{E}_t[x_{t+1}] = \mathbb{E}_t[\varepsilon_{t+1} + \theta_1 \varepsilon_t + \theta_2 \varepsilon_{t-1} + \dots] = \theta_1 \varepsilon_t + \theta_2 \varepsilon_{t-1} + \dots,$$

$$\mathbb{E}_t[x_{t+k}] = \mathbb{E}_t[\varepsilon_{t+k} + \theta_1 \varepsilon_{t+k-1} + \dots + \theta_k \varepsilon_t + \theta_{k+1} \varepsilon_{t-1} + \dots] = \theta_k \varepsilon_t + \theta_{k+1} \varepsilon_{t-1} + \dots,$$

$$\mathbb{V}_t[x_{t+1}] = \sigma_{\varepsilon}^2,$$

$$\mathbb{V}_t[x_{t+k}] = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_{k-1}^2) \sigma_{\varepsilon}^2.$$

## AR и ARMA

Общий принцип построения прогнозов – использовать те факты, что  $\mathbb{E}_t[\varepsilon_{t+j}] = 0$  и  $\mathbb{V}_t[\varepsilon_{t+j}] = \sigma_{\varepsilon}^2$  для  $j > 0$ . Выражаем  $x_{t+j}$  как сумму объектов, известных в момент  $t$ , и инноваций между  $t$  и  $t + j$ :

$$x_{t+j} = \{\text{функция от } \varepsilon_{t+j}, \varepsilon_{t+j-1}, \dots, \varepsilon_{t+1}\} + \{\text{функция от } \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, x_t, x_{t-1}, \dots\}$$

Объекты, известные в момент  $t$ , определяют условное среднее, или *прогноз*, а инновации между  $t$  и  $t + j$  определяют условную дисперсию, или *ошибку прогноза*. Неважно, выражаем ли мы то, что известно в момент  $t$ , через  $x$ -ы или через  $\varepsilon$ -ы, – это лишь вопрос удобства. Например, в случае AR(1), мы могли бы записать  $\mathbb{E}_t[x_{t+j}] = \phi^j x_t$  или  $\mathbb{E}_t[x_{t+j}] = \phi^j \varepsilon_t + \phi^{j+1} \varepsilon_{t-1} + \dots$ . Поскольку  $x_t = \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \dots$ , два выражения для  $\mathbb{E}_t[x_{t+j}]$ , очевидно, идентичны.

Проще всего выразить аналитически прогнозы AR и ARMA моделей (т.е. получить формулы с  $\mathbb{E}_t[x_{t+j}]$  в левой части и явным выражением в правой) обращением их в MA( $\infty$ )-представление. Чтобы получить численные прогнозы, проще использовать описанное ниже представление «пространством состояний» и рекурсивно их пересчитать.

## Многомерные ARMA

Многомерное прогнозирование имеет те же принципы, что и одномерное, где все переменные интерпретируются как векторы и матрицы. Как всегда, нужна осторожность при транспонировании и т.п. Например, если у нас векторная модель MA( $\infty$ ),  $x_t = B(L)$ , где  $B(L) \equiv B_0 + B_1L + \dots$ , имеем:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t[x_{t+j}] &= B_j\varepsilon_t + B_{j+1}\varepsilon_{t-1} + \dots, \\ \mathbb{V}_t[x_{t+j}] &= \Sigma + B_1\Sigma B_1' + \dots + B_{j-1}\Sigma B_{j-1}'.\end{aligned}$$

## 2 Представление «пространством состояний»

Модель AR(1) особенно удобна при вычислениях, поскольку и прогнозы, и ошибки прогнозов можно найти рекурсивно. В этом разделе описан замечательный трюк, с помощью которого любой линейный процесс можно представить как векторный AR(1), что приводит к легкому расчету прогнозов (помимо многого другого).

### ARMA в представлении AR(1)

Для примера начнем с ARMA(2,1):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

Мы можем это выражение преобразовать в

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \varepsilon_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\varepsilon_t],$$

что мы можем записать в форме AR(1) как

$$x_t = Ax_{t-1} + Cw_t.$$

Иногда удобно переопределить матрицу  $C$  так, чтобы ковариационная матрица инноваций была единичной. Например, если в предыдущей записи положить

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon \\ 0 \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix},$$

то  $\mathbb{E}[w_t w_t'] = I$ .

### Прогнозирование векторным AR(1)-представлением

Имея векторное AR(1)-представление, мы можем строить прогнозы, находить дисперсии ошибок прогнозов и функции импульсного отклика либо напрямую, либо через соответствующее MA( $\infty$ )-представление

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} A^j C w_{t-j}.$$

В любом случае, прогнозы определяются как

$$\mathbb{E}_t[x_{t+k}] = A^k x_t,$$

а дисперсии ошибок прогнозов – как<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} x_{t+1} - \mathbb{E}_t[x_{t+1}] &= Cw_{t+1} \Rightarrow \mathbb{V}_t[x_{t+1}] = CC', \\ x_{t+2} - \mathbb{E}_t[x_{t+2}] &= Cw_{t+2} + ACw_{t+1} \Rightarrow \mathbb{V}_t[x_{t+2}] = CC' + ACC'A', \\ \mathbb{V}_t[x_{t+k}] &= \sum_{j=0}^{k-1} A^j CC' A^{j'}. \end{aligned}$$

Эти формулы особенно приятны, поскольку они могут использоваться *рекурсивно*:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[x_{t+k}] &= A\mathbb{E}_t[x_{t+k-1}] \\ \mathbb{V}_t[x_{t+k}] &= CC' + A\mathbb{V}_t[x_{t+k-1}]A'. \end{aligned}$$

Таким образом, можно запрограммировать расчет целой цепочки прогнозов в одном цикле.

### VAR в векторном AR(1)-представлении

Формулы для многомерных прогнозов выглядят не очень-то аппетитно. Можно облегчить пересчет прогнозов VAR, если их также преобразовать в векторную AR(1). Концептуально это просто – надо просто интерпретировать  $x_t$  выше как вектор  $[y_t \ z_t]'$ . Вот наглядный пример. Начнем с обычной VAR:

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_{yy1}y_{t-1} + \phi_{yy2}y_{t-2} + \dots + \phi_{yz1}z_{t-1} + \phi_{yz2}z_{t-2} + \dots + \varepsilon_{yt}, \\ z_t &= \phi_{zy1}y_{t-1} + \phi_{zy2}y_{t-2} + \dots + \phi_{zz1}z_{t-1} + \phi_{zz2}z_{t-2} + \dots + \varepsilon_{zt}. \end{aligned}$$

Преобразуем систему а AR(1) следующим образом:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \\ y_{t-1} \\ z_{t-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{yy1} & \phi_{yz1} & \phi_{yy2} & \phi_{yz2} & & \\ \phi_{zy1} & \phi_{zz1} & \phi_{zy2} & \phi_{zz2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ & & \dots & & \ddots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \\ y_{t-2} \\ z_{t-2} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix},$$

или

$$x_t = Ax_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Sigma.$$

Или же, имея векторную форму VAR

$$x_t = \Phi_1 x_{t-1} + \Phi_2 x_{t-2} + \dots + \varepsilon_t,$$

преобразуем ее в

$$\begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots \\ I & 0 & \dots \\ 0 & I & \dots \\ \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ x_{t-3} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} [\varepsilon_t].$$

<sup>1</sup>Напоминаем, что если  $x$  – вектор с ковариационной матрицей  $\Sigma$  и  $A$  – подходящая по размерам матрица, то  $\mathbb{V}[Ax] = A\Sigma A'$ .

Имея в наличии AR(1)-представление, мы можем предсказывать и  $y$ , и  $z$ , как описано выше. Можно также выбирать матрицу  $C$  так, чтобы инновации были ортогональны, т.е.  $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = I$ .

Преобразование процесса в векторную AR(1) – очень удобный трюк, как при прогнозировании, так и других целей. Например, Кэмпбелл и Шиллер (Campbell & Shiller, 1988) исследуют приведенную стоимость, т.е.  $\mathbb{E}_t[\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j x_{t+j}]$ . Если  $x$  – дивиденды, то приведенной стоимостью будет цена. Чтобы вычислить приведенную стоимость из VAR с  $x_t$  в качестве первого элемента, авторы преобразуют VAR в векторную AR(1). После этого вычислять становится просто:  $\mathbb{E}_t[\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j x_{t+j}] = (\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j A^j)x_t = (I - \lambda A)^{-1}x_t$ . Хансен и Саргент (Hansen & Sargent, 1991) показывают, что невообразимое количество моделей посложнее простых ARMA и VAR, рассмотренных выше, можно представить в виде AR(1).

### 3 Функции импульсного отклика

Функция импульсного отклика – это траектория (по  $j$ ), которую описывает  $x_{t+j}$ , будучи инициирован единичной инновацией  $\varepsilon_t$ , т.е.  $\varepsilon_{t-j} = 0$ ,  $\varepsilon_t = 1$ ,  $\varepsilon_{t+j} = 0$ . Эта функция интересна по нескольким причинам. Во-первых, это еще одна характеристика поведения моделей. Во-вторых, что более важно, она заставляет задуматься о «причинах» и «эффектах». Например, можно рассчитать отклик ВВП на возмущение в денежной массе в VAR «ВВП–Деньги» и интерпретировать результат как «эффект» влияния на ВВП денежной политики.

Для AR(1)-модели,  $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$ . Из MA( $\infty$ )-представления видно, что функция импульсного отклика есть

$$\begin{array}{cccccccc} \varepsilon_t : & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_t : & 0 & 0 & 1 & \phi & \phi^2 & \phi^3 & \dots \end{array}$$

Аналогично, для MA( $\infty$ ),  $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j}$ , и

$$\begin{array}{cccccccc} \varepsilon_t : & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_t : & 0 & 0 & 1 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \dots \end{array}$$

Как обычно, векторные процессы подчиняются тем же закономерностям. Если записать векторное MA( $\infty$ )-представление как  $x_t = B(L)\varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t \equiv [\varepsilon_{yt} \ \varepsilon_{zt}]'$  и  $B(L) \equiv B_0 + B_1L + \dots$ , то  $\{B_0, B_1, \dots\}$  определяют функцию импульсного отклика. Точнее,  $B(L)$  означает

$$B(L) = \begin{bmatrix} b_{yy}(L) & b_{yz}(L) \\ b_{zy}(L) & b_{zz}(L) \end{bmatrix},$$

так что  $b_{yy}(L)$  содержит отклик  $y_{t+j}$  на единичное (в терминах  $y$ ) возмущение  $\varepsilon_{yt}$ ,  $b_{yz}(L)$  содержит отклик  $y_{t+j}$  на единичное (в терминах  $z$ ) возмущение  $\varepsilon_{zt}$ , и т.д.

Так же, как и в случае прогнозов, MA( $\infty$ )-представление удобно для аналитического изучения импульсных откликов, но их преобразование в векторное AR(1)-представление более удобно для расчета их на практике. Функция импульсного отклика для векторной AR(1) выглядит, как в вышеописанном случае скалярной AR(1). Для

$$x_t = Ax_{t-1} + C\varepsilon_t$$

функция импульсного отклика есть

$$C, AC, A^2C, \dots, A^kC.$$

Опять же ее можно рассчитать рекурсивно, умножая вновь и вновь на  $A$ . Если же нужен отклик  $y_t$ , а не всего вектора состояний, необходимо домножить на  $[1 \ 0 \ 0 \ \dots]'$ , чтобы выделить  $y_t$ , первый элемент вектора состояний.

Хотя результат выглядит как аналогичный (и тривиальный) отклику для AR(1), необходимо осознавать, что  $A$  и  $C$  – матрицы, и простая формула может содержать сложную динамику *любой* ARMA-модели конечного порядка. Например, для AR(2) функция импульсного отклика может содержать затухающие синусоиды.

### Некоторые факты об импульсных откликах

Из этих примеров следуют три важных свойства импульсных откликов.

1. MA( $\infty$ )-представление – это то же, что и функция импульсного отклика.

Этот факт очень полезен.

2. Самый легкий способ рассчитать MA( $\infty$ )-представление – просимулировать функцию импульсного отклика.

Интуитивно ясно, что импульсные отклики имеют отношение к прогнозам. Первые и последние связаны следующим образом:

3. Функция импульсного отклика – это то же, что и  $\mathbb{E}_t[x_{t+j}] - \mathbb{E}_{t-1}[x_{t+j}]$ .

Поскольку ARMA-модели линейны, отклик на единичное возмущение, если значение серии равно нулю, тот же, что и отклик на единичное возмущение, если система подвержена другим возмущениям. Это *неверно* для нелинейных моделей!

### Список литературы

- Campbell, J.Y. & R.J. Shiller (1988). Stock prices, earnings, and expected dividends. *Journal of Finance* 43, 661–676.
- Hansen, L.P. & T.J. Sargent (1991). Lecture notes on least squares prediction theory. In L.P. Hansen & T. J. Sargent (Eds.), *Rational Expectations Econometrics*, Boulder and Oxford: Westview Press.

## Prediction and impulse responses in linear systems

**John Cochrane**

*University of Chicago GSB, Chicago, USA*

Prediction is interesting for a variety of reasons. It is one of the few rationalizations for time-series to be a subject of its own, divorced from economics. Atheoretical forecasts of time series are often useful. The pattern of forecasts is also, like the autocorrelation function, an interesting characterization of the behavior of a time series.

# Прогнозирование доходностей акций<sup>\*</sup>

Пол Содерлинд<sup>†</sup>

Университет Св. Галлена, Св. Галлен, Швейцария

В настоящем эссе описываются базовые понятия анализа рынка акций, дается обзор простых методов поиска предсказуемых закономерностей для доходностей, а также приводятся эмпирические свидетельства подобной предсказуемости.

## 1 Доходности и гипотеза эффективных рынков

### Цены, дивиденды и доходности

Пусть  $P_t$  – цена акции в конце периода  $t$ , после выплаты всех дивидендов в  $t$  (пост-дивидендная цена). Валовая доходность ( $1 + R_{t+1}$ , типа 1,05) от обладания акцией с дивидендом (на акцию),  $D_{t+1}$ , между  $t$  и  $t + 1$  определяется как

$$1 + R_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}. \quad (1)$$

Дивиденд, конечно, может равняться нулю в какой-то период, так что такая формулировка включает и случай дневных доходностей с годовыми выплатами дивидендов.

### Гипотеза эффективных рынков

Гипотеза эффективных рынков (ГЭР) скептически настроена к любой попытке предсказать цены на акции. В простейшей форме она утверждает, что невозможно предсказать изменения цен на акции (или доходности), хотя ее другие формы утверждают несколько другое. Полусильная ГЭР состоит из двух частей: (i) доходности нельзя предсказать (из-за спекуляции и арбитража) на рынке с рациональными ожиданиями (вся доступная информация используется эффективно); (ii) ожидания действительно рациональны.

Эти предположения недавно были оспорены, как теоретически, так и эмпирически. Например, многие модели прайсинга акций (включая CAPM) означают, что премии за риск (ожидаемые сверхдоходности) должны меняться с волатильностью рынка, и известно (из опционных данных и простых методов анализа временных рядов), что волатильность действительно меняется во времени. Более того, есть свидетельства предсказуемости доходностей, особенно для средне- и долгосрочных горизонтов (период бизнес-циклов, т.е. несколько лет).

Большинство тестов на предсказуемость сосредотачиваются на сверхдоходностях, т.к. их легче привязать к теории меняющейся премии за риск, а также поскольку они обходят проблему долгосрочных изменений инфляции (сверхдоходность – реальная переменная). На практике результаты для номинальных или реальных доходностей и сверхдоходностей довольно похожи, поскольку флуктуации доходностей большинства акций гораздо масштабнее, чем флуктуации процентных ставок.

## 2 Модели временных рядов для доходностей акций

В этом разделе приведены эмпирические свидетельства, свойственные как доходностям, так и доходностям сверх безрисковой ставки (ставки процента). См. иллюстрации на Рис. 1–3.

<sup>\*</sup>Перевод С. Анатольева. Цитировать как: Содерлинд, Пол (2006) «Прогнозирование доходностей акций», Квантиль, №1, стр. 27–38. Citation: Söderlind, Paul (2006) “Prediction of stock returns,” Quantile, No.1, pp. 27–38.

<sup>†</sup>Адрес: s/bf-HSG, Rosenbergstrasse 52, CH-9000 St. Gallen, Switzerland. Электронная почта: Paul.Soderlind@unisg.ch

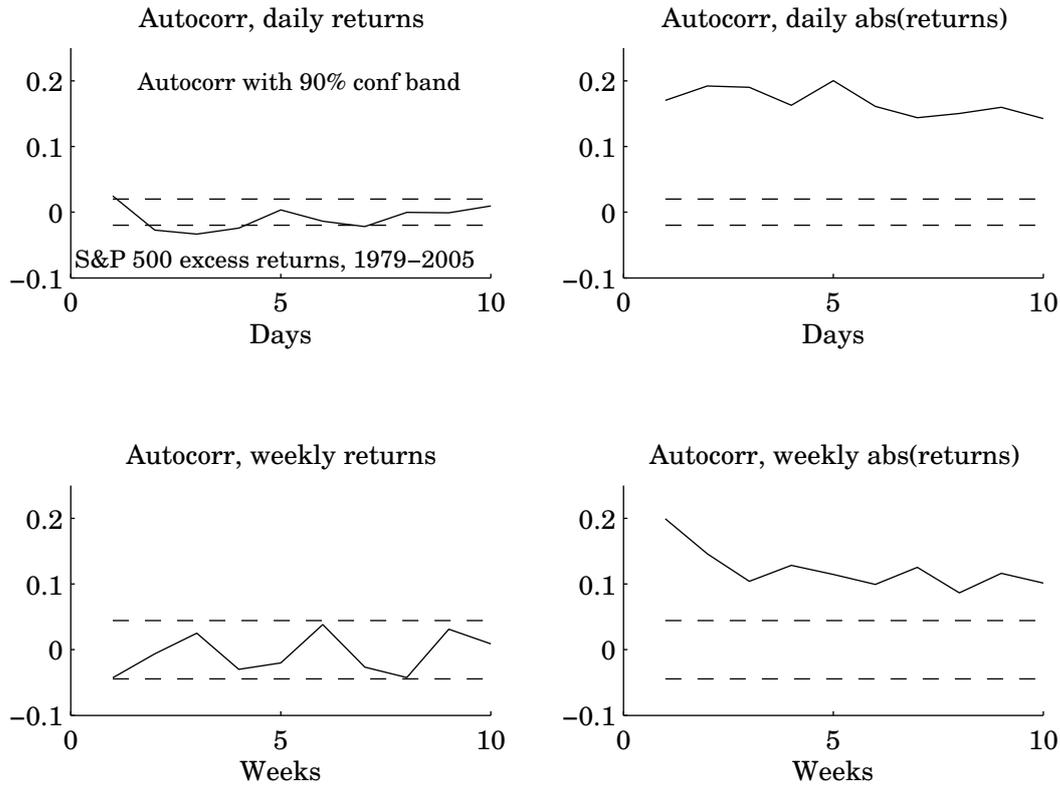


Рис. 1: Предсказуемость доходностей акций США

1. Эмпирические факты свидетельствуют о некоторой, хотя и слабой, положительной автокорреляции в краткогоризонтных доходностях (от дневных до месячных), вероятно, слишком маленькой, чтобы воспользоваться ей при торговле. Автокорреляция для маленьких фирм сильнее, чем для больших (возможно, для последних совсем нет автокорреляции в недельно- и болеегоризонтных доходностях). Это означает, что фондовые индексы с равномерным взвешиванием более автокоррелированы, чем фондовые индексы с ценозависимым взвешиванием.
2. Похоже, имеется отрицательная автокорреляция в многогодичных доходностях, таких как пятигодичные доходности в США за период 1926–1985 гг. Неясно, однако, что лежит в основе этого результата. Возможно, это лишь артефакт нескольких экстремальных эпизодов (Великая Депрессия). Более того, оценки весьма неточны, т.к. даже в длинной выборке очень мало неперекрывающихся доходностей, так что данный результат может оказаться лишь счастливой случайностью.
3. Похоже, что среднегоризонтные агрегированные фондовые доходности (т.е. доходности фондовых индексов с ценозависимым взвешиванием) предсказуемы различными *информационными переменными*. Это обычно выявляется с помощью регрессии доходности инвестиции, начатой в  $t$  и законченной в  $t + k$ ,  $R_{t+k}(k)$ , на текущем значении информационной переменной:

$$R_{t+k}(k) = \beta_0 + \beta_1(D_t/P_t) + \varepsilon_{t+k}. \quad (2)$$

В частности, будущие доходности на акции выглядят предсказуемыми текущими отношениями дивиденд-цена и выручка-цена (положительно, от одного до нескольких лет),

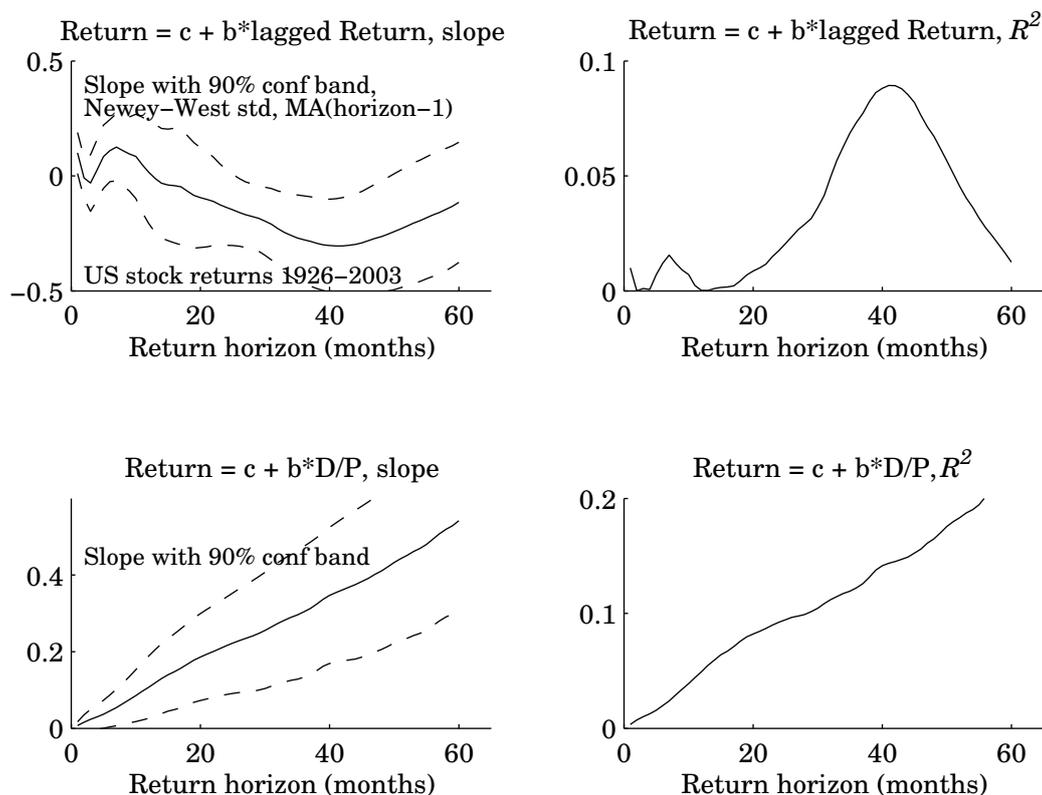


Рис. 2: Предсказуемость доходностей акций США

или изменениями процентных ставок (отрицательно, до года).

4. Даже если краткосрочные доходности,  $R_{t+1}$ , довольно трудно предсказать, часто легко предсказывается *волатильность*, измеренная как  $|R_{t+1}|$  или  $R_{t+1}^2$ . Это можно, видимо, использовать для формирования динамических трейдинговых стратегий на опционы.
5. Иногда находят, что цены на акции ведут себя по-разному в периоды с высокой волатильностью и в обычные периоды. Granger (1992) показал, что качество прогнозирования улучшается, если использовать разные прогнозирующие модели в этих двух режимах. Простой способ оценить модель для периодов нормальной волатильности – отбросить данные для волатильных периодов и других экстремальных событий.
6. Существуют также некоторые странные закономерности («аномалии»), такие как эффект высоких доходностей маленьких фирм в начале января.

### 3 Технический анализ

#### Основные идеи технического анализа

Технический анализ – это чаще всего поиск в данных локальных трендов или систематических нелинейных закономерностей. Основная идея состоит в том, что рынки не являются эффективными в каждый момент: цены реагируют на новости несколько медленно и предсказуемо. Логика в следующем: наблюдаемое движение цен обусловлено какой-то новостью

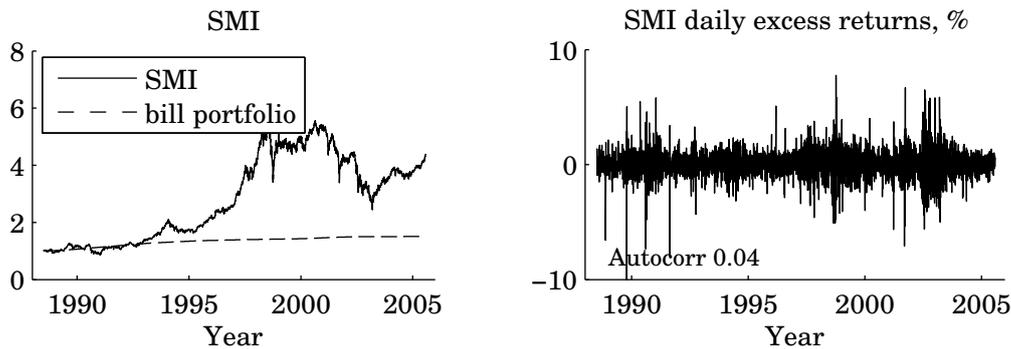


Рис. 3: Ежедневный индекс SMI, 1988–2005 гг.

(какой конкретно – не очень важно), так что старые закономерности могут подсказать, куда цены направятся в ближайшем будущем. Это попытка собрать более детальную информацию, чем используется на рынке в целом. На практике технический анализ сводится к графическому анализу различных преобразований (например, бегущего среднего) цен с целью обнаружить знакомые закономерности. В этом разделе мы приводим некоторые простые известные трейдинговые стратегии.

### Технический анализ и локальные тренды

Многие трейдинговые стратегии основываются на своего рода локальных трендах, понимаемых как положительную автокорреляцию в изменениях цен (также называемую моментом<sup>1</sup>).

*Правило фильтра* типа «покупать после роста на  $x\%$  и продавать после падения на  $y\%$ » основан на уверенности, что текущее движение цен продолжится.

*Правило бегущего среднего* – покупать, если короткое бегущее среднее (равномерно или экспоненциально взвешенное) превышает длинное бегущее среднее. Идея в том, что это событие сигнализирует о новом положительном тренде. Разница между упомянутыми бегущими средними называется *осциллятором* (или иногда схождение-расхождение бегущего среднего<sup>2</sup>). Одним из видов осциллятора бегущего среднего является *индекс относительной силы*<sup>3</sup>, отношение среднего уровня цены за дни «вверх» к среднему уровню цены за дни «вниз» в течение последних  $z$  (14-ти, чаще всего) дней.

*Правило нарушения торгового диапазона* обычно означает покупку, когда цена превышает предыдущий (локальный) максимум. Идея в том, что предыдущий максимум – это *уровень сопротивления* в том смысле, что некоторые инвесторы хотели бы продавать, когда цена достигает этого значения (возможно, ввиду уверенности, что цена не может превысить этот уровень; часто круглые числа играют роль уровней сопротивления). Как только этот искусственный уровень сопротивления преодолен, цена может вырасти значительно. И наоборот, при падении цен *уровень поддержки* играет ту же роль: некоторые инвесторы хотели бы покупать, когда цена достигает этого значения.

Когда цена уже идет вверх, правило нарушения торгового диапазона можно заменить на *правило туннеля*, работающего следующим образом. Во-первых, надо нарисовать *линию тренда* через предыдущие точки минимума и *линию туннеля* через предыдущие точки максимума, а затем продолжить эти линии. Если цена заходит вверх от туннеля (коридора), образованного этими двумя линиями, то время покупать. Другой вариант этого правила

<sup>1</sup>В физике момент есть произведение массы на скорость.

<sup>2</sup>Да, это правда – поклонники диаграмм готовы разработать собственный язык.

<sup>3</sup>Просьба не путать с относительной силой, обычно означающей отношение цен двух различных акций.

– определить туннель как *коридор Боллингера*, который есть  $\pm 2$  стандартного отклонения данных в бегущем окне вокруг бегущего среднего.

Закономерность *голова-плечо* – это последовательность трех максимумов (левое плечо, голова, правое плечо), средний из которых (голова) наивысший, причем два локальных минимума в промежутках находятся примерно на одном уровне (линия шеи). Если цена падает существенно ниже линии шеи, это воспринимается как начало негативного тренда. Обратное «голова-плечо» имеет противоположную закономерность.

Естественно, можно интерпретировать «покупку» в предыдущих правилах как что-то более активное, например, как замену короткой позиции длинной.

Часто объемы торгов также принимаются во внимание. Если объем торгов акций с падающей ценой высок относительно объема торгов акций с растущей ценой, это интерпретируется как присутствие на рынке давления на продажи (эта интерпретация проблематична, ибо на каждого продавца приходится покупатель, так что ситуацию можно интерпретировать и как присутствие на рынке давления на покупки).

Некоторые простые эмпирические свидетельства прибыльности таких трейдинговых стратегий можно видеть на Рис. 4.

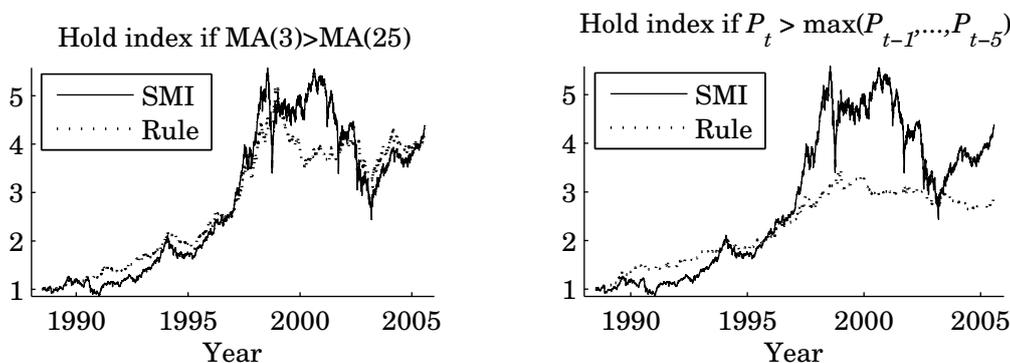


Рис. 4: Примеры трейдинговых стратегий применительно к индексу SMI. Портфели перебалансируются каждую среду. Если условие (в заголовке) выполнено, индекс держится еще неделю, в противном случае держится государственная бумага. На рисунках изображены значения портфелей.

### Технический анализ и возврат к среднему

Если же мы, напротив, уверены в возврате к среднему у цен, мы можем по сути обратить предыдущие трейдинговые стратегии: будем в основном продавать, когда цена высока.

Некоторые инвесторы утверждают, что на рынках присутствуют периоды возврата к среднему и периоды трендов, и что оба типа можно использовать. Ясно, что концепции уровней поддержки и сопротивления (или туннеля) основаны на возврате к среднему между двумя точками. Новый тренд в таком случае инициируется, когда цены выскакивают из коридора.

## 4 Фундаментальный анализ

### Приведенная стоимость будущих дивидендов

Фундаментальный анализ использует информацию о заработках, процентных ставках и факторах риска для оценки «фундаментальной» цены акции. Если она выше, чем текущая цена, может быть выгодно купить эту акцию.

Фундаментальная цена акции – это приведенная стоимость всех ожидаемых в будущем дивидендов. Дисконтирование производится, исходя из скорректированной на риск процентной ставки, которая обычно выше, чем безрисковая процентная ставка: она соответствует ожидаемой доходности акции. Если ставка дисконтирования постоянна и равна  $R$ , то фундаментальная цена равна

$$P_t = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}_t[D_{t+s}]}{(1+R)^s}. \quad (3)$$

Ожидания формируются исходя из информации, имеющейся в момент  $t$ . (Если мы предполагаем, что дивиденды будут расти с постоянной скоростью, мы получим модель Гордона, а (3) можно еще больше упростить.)<sup>4</sup>

Равенство (3) записано в терминах дивидендов. Конечно, текущие дивиденды обычно очень ровные и необязательно отражают перспективы фирмы – см. Рис. 5 для данных США. Вдобавок, мера, связанная с дивидендами, может не учитывать, что не все (или даже никакие) имеющиеся потоки наличности будут выплачены в качестве дивидендов.

Однако существуют альтернативные методы, использующие технологию дисконтирования потоков наличности. Методом, широко распространенным на практике, является модель ДПН компании (ДПН расшифровывается как «дисконтирование потока наличности»), используемая для расчета приведенной стоимости всей компании. Она использует определение потока наличности в широком смысле, потока свободной наличности (полный после выплаты налогов поток наличности, полученной от операций компании, которая доступна всем поставщикам капитала компании), который можно назвать истинным операционным потоком наличности. Этот поток свободной наличности дисконтируется соответствующим фактором дисконтирования для получения меры ценности операций компании. Сумма ценности операций компании и ценности неоперационных активов (потоки наличности, которые были исключены из потока свободной наличности) компании дает ценность всей компании, откуда можно определить ценность акции. Так как верное знание об успехах компании в прошлом дает существенный выигрыш для построения и оценивания прогнозов ее будущих успехов, анализ исторического прошлого деятельности компании обычно является первым шагом процесса оценки. Тут очень важно преобразовать бухгалтерские цифры в оценки экономической деятельности компании, имея также в виду, что такие бухгалтерские понятия, как заработок и выручка, могут также подвергаться политическим решениям менеджмента, как это происходило совсем недавно.

Когда бы технология ДПН ни применялась, важно использовать согласованные составляющие. Например, если выбирается какое-то определение потока наличности, нужно использовать и подходящие скорости роста потока наличности и подходящую ставку дисконтирования. Ради простоты мы вернемся к методу дисконтирования дивидендов, введенному ранее в этом разделе.

Фундаментальный анализ, таким образом, можно интерпретировать как попытку подсчитать правую часть в (3), то есть оценить фундаментальную ценность акции. Факторы, влияющие на будущую траекторию прибылей и, в конечном счете, дивидендов, часто анализируются на трех уровнях: макроэкономическая ситуация, отраслевые аспекты и аспекты, специфичные для конкретной фирмы.

<sup>4</sup>Чтобы вывести (3), заметим, что цену можно записать как дисконтированное значение цены в следующем периоде плюс дивиденды,  $P_t = (\mathbb{E}_t[D_{t+1}] + \mathbb{E}_t[P_{t+1}])/(1+R)$ . Подставим на место  $P_{t+1}$  формулу  $P_{t+1} = (\mathbb{E}_{t+1}[D_{t+2}] + \mathbb{E}_{t+1}[P_{t+2}])/(1+R)$ . Повторим и используем закон повторных матожиданий, например,  $\mathbb{E}_t[\mathbb{E}_{t+1}[D_{t+2}]] = \mathbb{E}_t[D_{t+2}]$ .

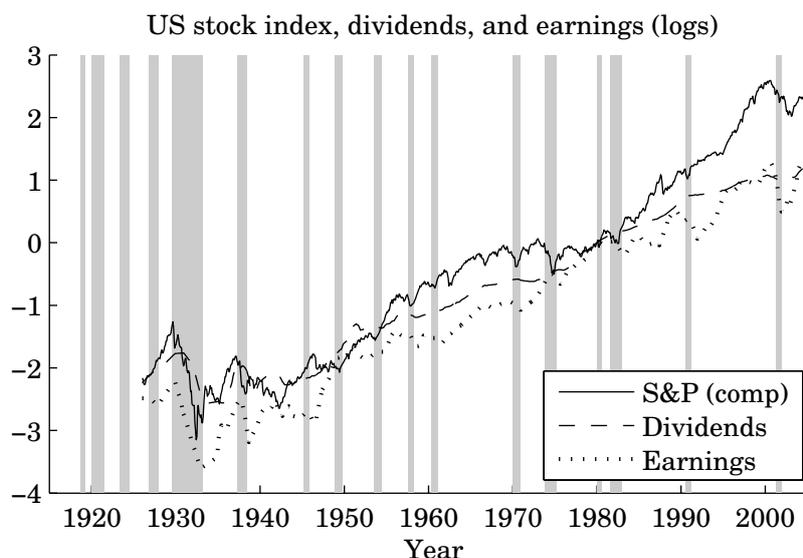


Рис. 5: Фондовый индекс США (S&P), дивиденды, заработки и рецессии по определению NBER (затенены)

### Эффект новостей

Из (3) ясно, что цена акции изменится при изменениях ставки дисконтирования или ожидаемый будущих дивидендов. Чтобы подчеркнуть это, рассмотрим экстремальный случай, где все дивиденды равны нулю, кроме как в момент  $t + 2$ . Цена акции в момент  $t$  тогда равна

$$P_t = \frac{\mathbb{E}_t[D_{t+2}]}{(1 + R)^2}. \quad (4)$$

В период  $t + 1$  ожидания дивиденда могут быть другими, да и ставка дисконтирования тоже (обозначим последнюю как  $R'$ ):

$$P_{t+1} = \frac{\mathbb{E}_{t+1}[D_{t+2}]}{1 + R'}. \quad (5)$$

Доходность этой акции с момента  $t$  до момента  $t + 1$  есть капитальная прибыль, так как в момент  $t + 1$  дивидендов нет:

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = (1 + R) \frac{\mathbb{E}_{t+1}[D_{t+2}]}{\mathbb{E}_t[D_{t+2}]} \frac{1 + R}{1 + R'}. \quad (6)$$

Эта реализованная доходность зависит от нескольких факторов, которые мы по очереди обсудим.

Во-первых, капитальная прибыль зависит от *ставки дисконтирования* (первый член в (6)): если в момент  $t + 1$  нет новостей, то капитальная прибыль равна ставке дисконтирования (безрисковая ставка плюс премия за риск).

Во-вторых, если имеется *новость о (будущих) дивидендах* (второй член в (6)), это повлияет на действительную доходность уже когда новость возникнет: новость о больших дивидендах увеличивает доходность. Важно помнить, что новость – это неожиданность по сравнению с тем, что ожидает рынок. Журналисты часто не понимают этого определения новости, когда пишут что-нибудь вроде «...непостижимо, но фондовый рынок отрицательно среагировал на 10%-ный рост доходов...».

В-третьих, *новость об ожидаемых (обязательных) доходностях* (третий член в (6)) также влияет на действительную доходность. Например, уменьшение обязательной доходности означает, что сегодняшняя действительная доходность высока ( $R' < R$ , так что последний член в (6) больше единицы). Интуиция заключается в том, что будущие дивиденды дисконтируются меньше, чем, как ранее ожидалось, необходимо, так что поток будущих дивидендов стоит больше. Это может быть обусловлено, например, неожиданным уменьшением номинальной процентной ставки (например, из-за изменения монетарной политики) или уменьшением премии за риск, которую требуют инвесторы от акций (например, из-за понижения риска дефолта ввиду улучшения фазы бизнес-цикла).

Достаточно часто новая информация влияет и на ожидаемые дивиденды (доходы), и на ставку дисконтирования. Иногда эти влияния действуют в одном и том же направлении. Например, неожиданное падение ставки монетарной политики (процента) может увеличить ожидаемые доходы и уменьшить дисконтирование, и оба тренда поднимут цены акций и таким образом создадут более высокие реализованные доходности в период падения ставки процента. Драматический пример описан на Рис. 9-5 в Siegel (1998), где FTSE-100 прыгнул после того, как Великобритания покинула ERM в сентябре 1992 г. и опустила ставки процента.

В некоторых случаях два упомянутых фактора действуют в противоположных направлениях. Например, реакция рынка на сильный отчет по безработице в США 5 июля 1996 г. («выплаты выше на 239000, безработица самая низкая за 6 лет на уровне 5,3%, зарплаты выше на 9 центов в час, что является самым большим ростом за 30 лет») – немедленное падение на 1,5% (см. Рис. 14-1 в Siegel, 1998). Причина в том, что хотя все это было хорошими новостями для доходов, эти же новости отражали повышенную вероятность того, что ФРС повысит процентную ставку, чтобы остудить любые признаки инфляции.

### **Доходности акций и бизнес-циклы**

Нисходящий прогноз начинается с анализа условий бизнес-цикла, затем добавляются факторы, специфичные для отрасли, а затем – специфичные для конкретной фирмы (акции). Ясно, что цены акций реагируют очень быстро на сигналы о спаде в бизнес-цикле. На самом деле доходности акций обычно предвещают бизнес-цикл – см. Рис. 5. Также ясно, что некоторые отрасли более цикличны, чем другие. Например, строительные компании и производители средств производства и автомобилей часто очень процикличны, в то время как производители продуктов питания и лекарств – наоборот. См. иллюстрацию на Рис. 6.

Тем не менее, далеко не все большие изменения на фондовых рынках объясняются поведением макропеременных. Большое количество прыжков вообще трудно осмысленно объяснить, по крайней мере если не верить в пузыри фондового рынка. См., например, таблицы 13-1A and 13-1B в Siegel (1998), где перечисляются действительно большие прыжки на фондовом рынке США и обсуждаются причины, которые могли их вызвать.

### **Ожидания рынка против собственных ожиданий**

Не у всех инвесторов одни и те же ожидания, особенно относительно будущих экономических условий. Есть множество свидетельств, что аналитики и различные предсказывающие агентства имеют разные мнения. Как нам тогда интерпретировать ожидания в «фундаментальной цене» (3)? Короткий ответ: ожидания в этих равенствах отражают нечто вроде усредненных ожиданий – «рыночных ожиданий». Консенсусные ожидания (то есть, ожидания, усредненные по опросам) часто используются как приближения для рыночных ожиданий.

Рассмотрим агента, не разделяющего рыночные ожидания. «Корректная» цена, согласно этому агенту, рассчитывается по (3), но используя его собственные ожидания. Положим, у этого агента на самом деле информация получше. Поможет ли это ему прибыльно торговать?

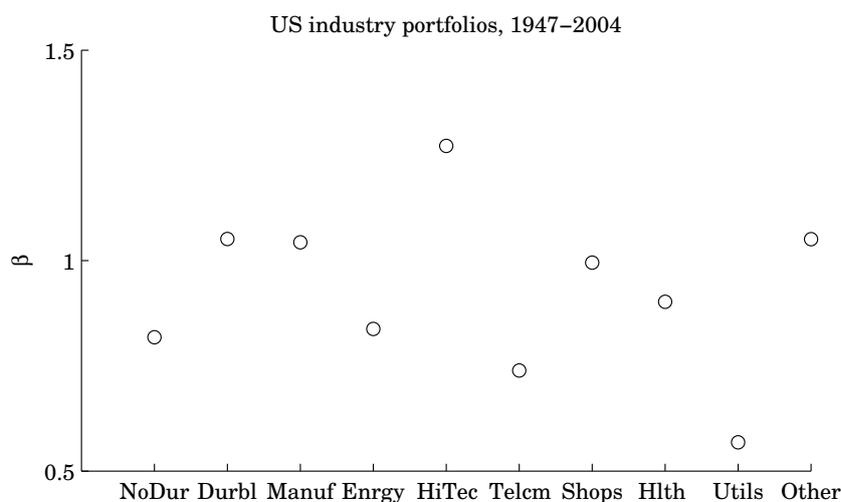


Рис. 6: Беты отраслевых индексов США

Да, но только когда (если?) рынок в конечном счете признает, что у этого агента лучшая информация.

Это показывает, что наиболее важным для прибыльной торговли может быть не спрогнозировать наилучшим образом фундаментальную ценность акции, а спрогнозировать наилучшим образом будущие настроения рынка относительно фундаментальной ценности. Идея рациональных ожиданий (ключевая компонента гипотезы эффективного рынка) в том, что нельзя сказать заранее, как в будущем изменятся ожидания... но кто знает, рационален ли в общем-то рынок?

## 5 Анализ бумаг

### Свидетельства об успехе аналитиков

В разделе 10.1 у Makridakis, Wheelwright & Hyndman (1998) показано, что имеется мало свидетельств, что средний аналитик рынка акций в среднем успешнее, чем рынок (т.е. пассивный индексный портфель). На самом деле, менее половины аналитиков успешнее рынка. Однако есть аналитики, которые, похоже, успешнее рынка в течение некоторого времени, но автокорреляция успешности слабая. Свидетельства с рынка паевых фондов похожи. Для последнего обычно также находят, что веса в портфелях не предсказывают движений в ценах.

Нужно помнить, что многие аналитики являются также и продавцами: либо акций, либо трейдинговых услуг. Также может быть, что их целевая функция довольно сильно отличается от минимизации квадратов ошибок прогнозов, или что мы там обычно используем для оценивания их успешности. (Количество тяжб в США после технологического бума/спада служит хорошим напоминанием).

### Слишком ли остро реагируют аналитики бумаг?

Статья Bondt & Thaler (1990) сравнивает полугодовые прогнозы (с горизонтом в один и два года) с действительными изменениями доходов на акцию для нескольких сотен компаний (1976–1984 гг.). Вопрос изучается с помощью регрессий типа

$$\text{Actual change} = \alpha + \beta \times \text{Forecasted change}$$

и анализа оценок коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ . При рациональных ожиданиях (и достаточно длинной выборке), должно быть  $\alpha = 0$  (прогнозы несмещены) и  $\beta = 1$  (пропорциональность,

отсутствие преувеличения).

Основные выводы следующие. Главный результат состоит в том, что  $0 < \beta < 1$ , так что предсказанное изменение систематически слишком большое: за предсказанным изменением в 1% (в среднем) следует менее чем 1%-ное реальное изменение в том же направлении. Это означает, что аналитики в этой выборке слишком экстремальны: они преувеличивают и позитивные, и негативные новости.

### **Высокочастотная торговля, основанная на рекомендациях аналитиков рынка акций**

В Barber, Lehavy, McNichols & Trueman (2001) представлена несколько другая картина, которая сфокусирована на прибыльности трейдинговой стратегии, основанной на рекомендациях аналитиков. Авторы используют огромную базу данных (около 360000 рекомендаций по акциям США) в период 1985–1996 гг. Они делят акции на пять портфелей в зависимости от консенсусной (средней) рекомендации и пересортировывают их каждый день, если публикуется новая рекомендация. Авторы находят, что такая ежедневная трейдинговая стратегия дает годовую 4%-ную сверхдоходность на портфель наиболее рекомендуемых акций и годовую 5%-ную сверхдоходность на портфель наименее рекомендуемых акций.

Эта стратегия требует множества транзакций (с оборотом в 400% в год), так что торговые издержки обычно сокращают сверхдоходность на лучший портфель почти до нуля. Менее частое ребалансирование (недельное или месячное) дает очень маленькую сверхдоходность на лучшие акции, но отрицательную сверхдоходность на худшие акции. Chance & Hemler (2001) получают похожие результаты при изучении инвестиционных советов 30-ю профессиональными аналитиками-спекулянтами.

### **Характеристика прогнозов индивидуальных аналитиков в Европе**

В Bolliger (2001) изучается точность прогнозов доходов на акцию для европейских (13 стран) аналитиков в период 1988–1999 гг. В общей сложности изучаются около 100000 прогнозов. Найдено, что точность прогнозов аналитика для акций фирмы позитивно связана с тем, сколько раз данный аналитик прогнозировал для данной фирмы, а также, что удивительно, с тем, для сколько фирм этот аналитик делал прогнозы. Точность отрицательно связана с количеством стран, для которых аналитик строил прогнозы, а также с размером брокерского дома, на который он работает.

### **Агентства рейтингов облигаций против аналитиков рынка акций**

Ederington & Goh (1998) используют данные об изменениях рейтингов Moody's всех корпоративных облигаций с 1984 г. по 1990 г. и соответствующие прогнозы доходов у различных аналитиков рынка акций.

Идея статьи Ederington & Goh (1998) – узнать, следуют ли рейтинги облигаций за прогнозами доходов или же наоборот, и влияют ли они на доходности (цены) акций.

1. Чтобы понять, влияют ли изменения рейтингов на доходности акций, авторы вначале создают модель «нормальной» доходности

$$\text{normal stock return}_t = \alpha + \beta \times \text{return on stock index}_t,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  оцениваются на нормальном временном периоде, т.е. не включающем изменения рейтинга. Сверхдоходность затем рассчитывается как действительная доходность минус нормальная доходность. Затем авторы изучают, как такие сверхдоходности себя ведут, в среднем, возле дат изменения рейтинга. Заметим, что «время» измеряется,

индивидуально для каждой акции, как время до дня изменений рейтинга. Выясняется, что значимые отрицательные сверхдоходности следуют за понижениями рейтинга, а нулевые сверхдоходности следуют за повышениями рейтинга.

2. Затем авторы обращаются к вопросу, влияют ли рейтинги облигаций на прогнозы доходов или же наоборот. Они отмечают, что имеются некоторые свидетельства предсказуемости в ревизиях прогнозов доходов. Они подгоняют простую авторегрессионную модель для прогнозов доходов и конструируют переменную ревизии прогнозов доходов из этой модели. Затем авторы соотносят эту переменную и рейтинги облигаций. Вкратце, результаты следующие:

- (a) И прогнозы доходов, и рейтинги реагируют на одну и ту же информацию, но имеется и прямой эффект изменений рейтингов, разный при повышениях и понижениях.
- (b) При понижениях рейтинги сильно и отрицательно напрямую влияют на прогнозы доходов, а доходности реагируют даже быстрее, чем аналитики.
- (c) При повышениях рейтинги слабо и положительно напрямую влияют на прогнозы доходов, а влияния на доходности нет.

Возможной причиной того, почему рейтинги облигаций могут влиять на прогнозы доходов и цены, является тот факт, что фирмы, занимающиеся рейтингами, обычно имеют больше доступа к инсайдерской информации о фирмах, чем фондовые аналитики и инвесторы. Возможной причиной наблюдаемого асимметричного отклика доходностей на рейтинги является то, что фирмы с радостью сообщают о позитивных новостях, но менее охотно сообщают о негативных. Если это так, информационные преимущества фирм, занимающихся рейтингами, должны быть особо крупными после плохих новостей. Понижения рейтингов в таком случае выявляют больше новой информации, чем повышения. Разные же реакции аналитиков доходов и самих доходностей трудно объяснить.

## Международные различия в свойствах прогнозов аналитиков

Ang & Ciscione (2001) изучают прогнозы доходов множества фирм из 42 стран за период с 1988 г. по 1997 г. Найдены некоторые различия по странам: прогнозисты расходятся сильнее, а ошибки прогнозов больше в странах с небольшим ростом ВВП, меньшей прозрачностью бухгалтерской отчетности и структуры семейной собственности.

Однако наиболее робастный вывод – это то, что прогнозы для фирм с потерями особенные: прогнозисты расходятся сильнее, более неуверены, но более оптимистичны касательно этих фирм.

## 6 Гипотеза ожиданий и форвардные цены

Достаточно часто используют форвардную (или фьючерсную) цену в качестве грубого прогноза будущей цены актива. Идея состоит в том, что спекуляция должна подталкивать форвардную цену к рыночному ожиданию будущей цены.

Однако в реальности все не так. Причина в том, что *паритет форварда–спота* (отсутствие арбитража) показывает, что форвардная цена,  $F_t$ , не содержит намного больше информации, чем текущая цена актива,  $P_t$ . Чтобы это проиллюстрировать, предположим, что форвардный контракт истекает в следующем периоде, и что до этого момента дивиденды не выплачиваются. Тогда форвардная цена должна удовлетворять

$$F_t = (1 + i_t)P_t, \tag{7}$$

где  $i_t$  – процентная ставка. Интуиция относительно этого соотношения проста: форвардный контракт – это как покупка актива в кредит.

Это говорит о том, что использование форвардной цены как прогноза – это практически то же, что использование текущей цены, что соответствует предположению о случайном блуждании (со сносом из-за процентной ставки).

### Список литературы

- Ang, J.S. & S.J. Ciccone (2001). International differences in analyst forecast properties. Manuscript, Florida State University.
- Barber, B., R. Lehavy, M. McNichols & B. Trueman (2001). Can investors profit from the prophets? Security analyst recommendations and stock returns. *Journal of Finance* 56, 531–563.
- Bolliger, G. (2001). The characteristics of individual analysts' forecasts in Europe. Manuscript, University of Manitoba.
- Bondt, W.F.M.D. & R.H. Thaler (1990). Do security analysts overreact? *American Economic Review* 80, 52–57.
- Chance, D.M. & M.L. Hemler (2001). The performance of professional market timers: Daily evidence from executed strategies. *Journal of Financial Economics* 62, 377–411.
- Ederington, L.H. & J.C. Goh (1998). Bond rating agencies and stock analysts: Who knows what when? *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 33, 569–585.
- Granger, C.W.J. (1992). Forecasting stock market prices: Lessons for forecasters. *International Journal of Forecasting* 8, 3–13.
- Makridakis, S., S.C. Wheelwright & R.J. Hyndman (1998). *Forecasting: Methods and Applications*. New York: Wiley.
- Siegel, J.J. (1998). *Stocks for the Long Run*. New York: McGraw-Hill.

## Prediction of stock returns

Paul Söderlind

*University of St. Gallen, St. Gallen, Switzerland*

This essay describes the basics of the stock market analysis, gives a survey of simple methods of searching for predictive patterns in returns, as well as lists empirical evidence of such predictability.

# Тестирование на предсказуемость\*

Станислав Анатольев†

*Российская экономическая школа, Москва, Россия*

В настоящем эссе содержится краткий обзор существующих простых тестов на предсказуемость различных характеристик стационарных временных рядов.

## 1 Предсказуемость и нулевая гипотеза

Разговор в настоящем эссе пойдет о прогнозировании стационарного ряда  $y_t$  своей предысторией  $\mathcal{I}_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ , а точнее, предиктором  $x_t$  из этой предыстории. Предиктор должен быть тоже стационарен и вдобавок недискретен. Наиболее актуально говорить о финансовой доходности в качестве  $y_t$ , хотя речь может идти и о росте ВВП, инфляции и т.д.

Положим, мы хотим проверить нулевую гипотезу

$$H_0 : \mathbb{E}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \text{const},$$

где  $g(u)$  – выбранная нами функция. Такая гипотеза звучит как «непредсказуемость  $g$ » или «условная независимость  $g$ ». Например, если  $g(u) = u$ , мы говорим о «непредсказуемости среднего», а если  $g(u) = \text{sign}(u)$ , то о «непредсказуемости знака». В принципе, понятие «непредсказуемость дисперсии» соответствует выбору  $g(u) = (u - \mathbb{E}[u])^2$ , но здесь, к сожалению, фигурирует неизвестный параметр  $\mathbb{E}[u]$ . Зато легко говорить о совместной «условной независимости среднего и дисперсии», если  $\mathbf{g}(u) = (u, u^2)'$ .

Еще раз подчеркнем, что выбор  $g(u)$  диктует то единственное (если функция  $g(u)$  скалярна) свойство непредсказуемости, которое будет проверяться обсуждаемыми тестами. При этом одно из таких свойств может быть не связано с другим. Например, возьмем чистую ARCH-модель  $y_t = \mu + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , а  $\mu \neq 0$ . Здесь имеется условная независимость среднего, так как  $\mathbb{E}[y_t | \mathcal{I}_{t-1}] = \mu = \text{const}$ . Очевидно, что ряд, подчиняющийся такой модели, не обладает свойством условной независимости дисперсии, ибо  $\sigma_t^2 \neq \text{const}$ . Менее очевидно (см. Christoffersen & Diebold, 2006), что он к тому же знакопредсказуем:

$$\mathbb{E}[\text{sign}(y_t) | \mathcal{I}_{t-1}] = 2\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma_t}\right) - 1 \neq \text{const}.$$

Если же мы немного изменим модель, взяв простейший вариант ARCH-M  $y_t = \gamma\sigma_t + \varepsilon_t$ , где  $\gamma > 0$  и  $\varepsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , наш ряд будет предсказуем в смысле среднего, так как  $\mathbb{E}[y_t | \mathcal{I}_{t-1}] = \gamma\sigma_t \neq \text{const}$ , но непредсказуем в смысле знака:

$$\mathbb{E}[\text{sign}(y_t) | \mathcal{I}_{t-1}] = 2\Phi(\gamma) - 1 = \text{const}.$$

Проще всего, конечно, построить пример ряда с непредсказуемой дисперсией, но предсказуемыми средним и знаком:  $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$ , а  $\mu_t \neq \text{const}$ .

Если мы говорим об отсутствии предсказуемости любого типа, то, скорей всего, мы имеем в виду серийную независимость временного ряда. Такую гипотезу можно протестировать, например, широко известным BDS-тестом.

\*Цитировать как: Анатольев, Станислав (2006) «Тестирование на предсказуемость», Квантиль, №1, стр. 39–42. Citation: Anatolyev, Stanislav (2006) “Testing for predictability,” Quantile, No.1, pp. 39–42.

†Адрес: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, 47, офис 1721(3). Электронная почта: [sanatoly@nes.ru](mailto:sanatoly@nes.ru)

## 2 Тестирование

Некоторые из тестов на предсказуемость разработаны в эконометрической литературе, другие – в финансовой.

Если нас интересует тестирование на непредсказуемость знака, можно воспользоваться DA-тестом (от “directional accuracy”), описанным в Pesaran & Timmermann (1992). Вообще-то авторы формулировали нулевую гипотезу и тестовую статистику в терминах индикаторов события «направление прогноза совпало с реализованным направлением», но ввиду линейной зависимости между знаком и индикатором тестовые статистики получают асимптотически эквивалентны (см. Anatolyev & Gerko, 2005). Тестовая статистика равна

$$DA = \sqrt{\frac{T}{\hat{V}_{DA}}} \left( \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t) \text{sign}(y_t) - \left( \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t) \right) \left( \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(y_t) \right) \right),$$

где

$$\hat{V}_{DA} = (1 - \hat{m}_x^2)(1 - \hat{m}_y^2), \quad \hat{m}_y = \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(y_t), \quad \hat{m}_x = \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t),$$

и асимптотически распределена как  $N(0, 1)$  под нулевой гипотезой.

Схожий по построению тест на непредсказуемость среднего разработан в Anatolyev & Gerko (2005) и называется EP-тестом (от “excess profitability”). Тестовая статистика равна

$$EP = \sqrt{\frac{T}{\hat{V}_{EP}}} \left( \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t) y_t - \left( \frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t) \right) \left( \frac{1}{T} \sum_t y_t \right) \right),$$

где

$$\hat{V}_{EP} = (1 - \hat{m}_x^2) \frac{1}{T} \sum_t (y_t - \bar{y})^2,$$

и асимптотически распределена как  $N(0, 1)$  под нулевой гипотезой. Интересно, что в отличие от DA-теста EP-тест имеет экономическую интерпретацию в случае, когда  $y_t$  – логарифмическая доходность какого-то актива. А именно, EP-статистика есть нормализованная доходность трейдинговой стратегии, предписывающей покупать при положительном прогнозе доходности и продавать при отрицательном, сверх доходности определенной пассивной позиции. Отсюда и название теста.

Описанные в финансовой литературе тесты на предсказуемость обычно имеют вид линейной регрессии, при этом тестируется какой-то коэффициент на равенство нулю. Алгоритм часто именуется тестированием на способность побить рынок (“market timing ability”). Например, Breen, Glosten & Jagannathan (1989) предложили прогонять парную регрессию индикатора события «реализованная доходность положительна» на индикаторе события «прогноз доходности положителен» и тестировать коэффициент наклона на равенство нулю (назовем это BGJ-тестом). Cumby & Modest (1987) предложили использовать парную регрессию самой реализованной доходности на индикаторе события «прогноз доходности положителен» (пусть это будет CM-тест). Мало того, Breen, Glosten & Jagannathan (1989) заодно предложили поменять правую и левую части в их регрессии, то есть прогонять парную регрессию индикатора события «прогноз доходности положителен» на индикаторе события «реализованная доходность положительна» (пусть это будет обратный BGJ-тест). Авторы, кстати, упоминают, что последний тест асимптотически эквивалентен знаменитому тесту Henriksson & Merton (1981), основанному на тестировании независимости в факторной таблице  $2 \times 2$ .

Anatolyev (2006) показал, что многие из упомянутых тестов, несмотря на несхожесть построения, асимптотически эквивалентны (конечно, надо помнить, что при сравнении тестов

они должны тестировать одну и ту же гипотезу). В частности, DA и VGJ тестируют нулевую гипотезу о непредсказуемости знака и асимптотически эквивалентны. Аналогично, EP и SM тестируют нулевую гипотезу о непредсказуемости среднего и также асимптотически эквивалентны<sup>1</sup>. В таком случае проще всего тестировать непредсказуемость  $g$  с помощью парной линейной регрессии в общем случае вида

$$g(y_t) = \alpha_{g,h} + \beta_{g,h}h(x_t) + \eta_t,$$

где  $h(x_t)$  – произвольная функция. Гипотеза  $\mathbb{E}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \text{const}$  соответствует ограничению  $\beta_g = 0$ , которое тестируется с помощью t-теста. При этом необходимо применять стандартные ошибки в форме Уайта, кроме тех случаев, когда  $\mathbb{V}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \text{const}$  при нулевой гипотезе, что как раз имеет место при непредсказуемости знака. В таких частных случаях можно использовать и стандартные ошибки в обычной форме. Применение стандартных ошибок в форме, совместимой с автокорреляцией и гетероскедастичностью (например, в форме Ньюи–Уэста) тоже возможно, но такой необходимости нет.

Скажем, SM-тест соответствует выбору  $g(u) = u$  (поскольку тестируется гипотеза о непредсказуемости среднего) и  $h(x_t) = \text{sign}(u)$  (без определенной причины). Видно, что мы можем тестировать ту же гипотезу, выбрав, например,  $h(x_t) = u$ , что вполне естественно и делается, например, в Bossaerts & Hillion (1999).

В Anatolyev (2006) показано, что желаемое свойство непредсказуемости можно протестировать, используя и обратную регрессию, примером чего служит обратный VGJ-тест, при условии использования стандартных ошибок в форме Уайта. Применение же стандартных ошибок в форме, совместимой с автокорреляцией и гетероскедастичностью, является в данном случае ошибкой!

Кроме того, в Anatolyev (2006) содержится дискуссия по поводу построения и интерпретации вышеописанных тестов на предсказуемость. Вот некоторые соображения:

- а) Мощность теста варьируется в зависимости от выбора функции  $h(u)$  и максимальна, когда  $h(x_t) - \mathbb{E}[h(x_t)]$  пропорциональна

$$\frac{\delta(x_t) - \mathbb{E}[\delta(x_t)]}{\mathbb{V}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}]}$$

при последовательности локальных альтернатив  $\mathbb{E}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \delta(x_t) / \sqrt{T}$ .

- б) Гипотезу о совместной непредсказуемости нескольких факторов

$$H_0 : \mathbb{E}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \text{const}$$

можно проверить тестированием на равенство нулю всех элементов матрицы коэффициентов  $B_{g,h}$  с помощью Вальдовского теста, основанного на МНК-оценках коэффициентов в системе регрессионных уравнений

$$g(y_t) = \alpha_{g,h} + B_{g,h}h(x_t) + \eta_t,$$

где теперь жирные буквы обозначают вектора. Например, если нас интересует гипотеза о совместной непредсказуемости среднего и дисперсии, естественно оценить с помощью МНК и тестировать гипотезу  $\beta_{y,x} = \beta_{y,x^2} = \beta_{y^2,x} = \beta_{y^2,x^2} = 0$  известными методами в регрессионной системе

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_y + \beta_{y,x}x_t + \beta_{y,x^2}x_t^2 + \eta_{y,t}, \\ y_t^2 &= \alpha_{y^2} + \beta_{y^2,x}x_t + \beta_{y^2,x^2}x_t^2 + \eta_{y^2,t}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Точнее, надо использовать робастную к возможной гетероскедастичности версию EP-статистике, с добавкой к оценке асимптотической дисперсии  $\hat{V}_{EP}$ , равной  $-2\hat{m}_x(\frac{1}{T} \sum_t \text{sign}(x_t)y_t^2 - \hat{m}_x \frac{1}{T} \sum_t y_t^2)$ .

- в) Когда мы говорим о тестировании в рамках линейной регрессии, мы не имеем в виду, что это «регрессия» в полном понимании этого слова. Точнее, это действительно регрессия в условиях действия нулевой гипотезы, когда  $\beta_g = 0$  и поэтому  $\mathbb{E}[g(y_t)|\mathcal{I}_{t-1}] = \text{const}$ , но вне ее действия это никакая не линейная параметрическая регрессия;  $h(x_t)$  в правой части стоит только потому, что мы сами его/ее туда поставили, и никакая интерпретация связи между  $g(y_t)$  и  $h(x_t)$  недопустима. В прикладной литературе, тем не менее, иногда встречаются даже попытки обосновать причинно-следственную связь между этими функциями, и часто вышеописанная линейная регрессия объявляется параметрической, а тест – параметрическим. Не будем поддаваться искушению – линейное уравнение действительно выглядит как параметрическая регрессия, – но, как мы уже упомянули, регрессией она в общем-то не является и все описанные тесты являются непараметрическими (что, впрочем, очевидно для DA- и EP-тестов).

## Список литературы

- Anatolyev, S. (2006). A unifying view of some nonparametric predictability tests. New Economic School. Доступна в SSRN: <http://ssrn.com/abstract=930007>.
- Anatolyev, S. & A. Gerko (2005). A trading approach to testing for predictability. *Journal of Business & Economic Statistics* 23, 455–461.
- Bossaerts, P. & P. Hillion (1999). Implementing statistical criteria to select return forecasting models: what do we learn? *Review of Financial Studies* 12, 405–428.
- Breen, W., L.R. Glosten & R. Jagannathan (1989). Economic significance of predictable variations in stock index returns. *Journal of Finance* 44, 1177–1189.
- Christoffersen, P.F. & F.X. Diebold (2006). Financial asset returns, direction-of-change forecasting, and volatility dynamics. *Management Science* 52, 1273–1288.
- Cumby, R.E., & D.M. Modest (1987). Testing for market timing ability: a framework for forecast evaluation. *Journal of Financial Economics* 19, 169–89.
- Henriksson, R.D. & R.C. Merton (1981). On market timing and investment performance II: statistical procedures for evaluating forecasting skills. *Journal of Business* 54, 513–533.
- Pesaran, M.H. & A. Timmermann (1992). A simple nonparametric test of predictive performance. *Journal of Business & Economic Statistics* 10, 561–565.

# Testing for predictability

Stanislav Anatolyev

*New Economic School, Moscow, Russia*

This essay contains a short survey of existing simple tests for predictability of various characteristics of stationary time series.

# Выбор модели и парадоксы прогнозирования\*

Олег Ицхоки<sup>†</sup>

*Гарвардский Университет, Кэмбридж, США  
Центральный Экономико-Математический Институт, Москва, Россия*

В настоящем эссе мы высказываем ряд теоретических гипотез, позволяющих в той или иной мере разрешить два парадокса прогнозирования: (1) почему простые линейные модели зачастую обладают преимуществом в предсказательной силе над более сложными нелинейными моделями, которые, в свою очередь, позволяют получить более точную внутривыборочную подгонку данных; (2) почему комбинации прогнозов нередко повышают предсказательную силу индивидуальных прогнозов. В работе также приводится численный пример, иллюстрирующий выдвигаемые теоретические положения.

## 1 Введение

Настоящее эссе посвящено анализу двух широко известных эмпирических фактов в области прогнозирования экономических временных рядов, не имеющих общепризнанного теоретического обоснования. Первый факт, или, скорее, эмпирическое правило, состоит в том, что простые линейные модели, как правило, позволяют получить более качественные вневыборочные прогнозы, несмотря на то, что более сложные нелинейные модели обеспечивают более точную внутривыборочную подгонку данных. Некоторые исследователи полагают, что простота и компактность линейных моделей делает их более устойчивыми к неверной спецификации, что является важным при долгосрочном прогнозировании.

Второе эмпирическое правило состоит в том, что комбинирование прогнозов нередко улучшает качество индивидуальных прогнозов. В серии работ в 1960-е и 1970-е гг. Грэнжер и его соавторы<sup>1</sup> развили технику получения оптимальной комбинации прогнозов, когда все индивидуальные модели являются лишь аппроксимацией процесса, генерирующего данные. Тем не менее, эти работы не дают теоретического объяснения, почему подобные ситуации часто возникают на практике.

Оба эмпирических факта были подробно исследованы на примере большого числа экономических временных рядов из США в работе Стока и Уотсона (Stock & Watson, 1999). Тем не менее, теоретическое обоснование этих фактов до сих пор отсутствует. В данной работе делается небольшой шаг к объяснению данных двух закономерностей.

## 2 Парадокс

В первую очередь следует подчеркнуть, что описанные эмпирические факты представляют собой некий парадокс с точки зрения стандартного эконометрического подхода к прогнозированию. Действительно, любой временной ряд может быть разложен на предсказуемую и непредсказуемую компоненты:  $\exists \mu_{t-1} \in I_{t-1}$ , такая, что  $y_t = \mu_{t-1} + \varepsilon_t$  и  $\mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_t] = 0$ , где  $\mu_{t-1}$  является предсказуемой компонентой (т.е. принадлежит информационному множеству

\*Цитировать как: Ицхоки, Олег (2006) «Выбор модели и парадоксы прогнозирования», Квантиль, №1, стр. 43–51. Citation: Itskhoki, Oleg (2006) “Model selection and paradoxes of prediction,” Quantile, No.1, pp. 43–51.

<sup>†</sup>Адрес: Littauer Center, Harvard University, 1875 Cambridge st., Cambridge, MA 02138, USA. Электронная почта: [itskhoki@fas.harvard.edu](mailto:itskhoki@fas.harvard.edu)

<sup>1</sup>Например, Bates & Granger (1969) и Granger & Newbold (1977).

$I_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ , а  $\varepsilon_t$  – непредсказуемой компонентой (мартингалным приращением относительно  $I_{t-1}$ ). В результате,  $\mathbb{E}_{t-1}[y_t] \equiv \mathbb{E}[y_t|I_{t-1}] = \mu_{t-1} + \mathbb{E}[\varepsilon_t|I_{t-1}] = \mu_{t-1}$ .

Из этого следует, что наилучшим как внутривыборочным, так и вневыборочным прогнозом<sup>2</sup> для  $y_t$  является  $\mu_{t-1}$ . Формально,  $\forall g_{t-1} \in I_{t-1}$

$$MSPE(g_{t-1}) \equiv \mathbb{E}\{y_t - g_{t-1}\}^2 = MSPE(\mu_{t-1}) + \underbrace{\mathbb{E}\{\mu_{t-1} - g_{t-1}\}^2}_{\geq 0}.$$

Следовательно,  $MSPE(g_{t-1}) \geq MSPE(\mu_{t-1}) \forall g_{t-1} \in I_{t-1}$ . Данный результат можно обобщить на случай прогноза на  $h$  шагов вперед. Согласно закону повторного математического ожидания, оптимальным прогнозом на  $h$  шагов вперед является  $\mathbb{E}_t y_{t+h} = \mathbb{E}_t \mu_{t+h-1}$ .

Данное свойство – это результат того, что непредсказуемая компонента  $\varepsilon_t = y_t - \mu_{t-1}$  не коррелирует с любым элементом из информационного множества  $I_{t-1}$ :

$$\mathbb{E}[(y_t - \mu_{t-1})(\mu_{t-1} - g_{t-1})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_t] \cdot (\mu_{t-1} - g_{t-1})] = 0.$$

Другими словами, непредсказуемая компонента  $\varepsilon_t$  не коррелирует с разностью между ошибкой  $\nu_t = y_t - g_{t-1}$  произвольного прогноза  $g_{t-1}$  и самой собой:

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot (\nu_t - \varepsilon_t)] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot (\mu_{t-1} - g_{t-1})] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{C}[\varepsilon_t, \nu_t] = \mathbb{V}[\varepsilon_t].$$

Это эквивалентно тому, что ошибку  $\nu_t$  произвольного прогноза  $g_{t-1}$  можно разложить на ошибку оптимального прогноза  $\varepsilon_t$  и полностью прогнозируемый «шум»  $\xi_{t-1} \in I_{t-1}$ :

$$\nu_t = \varepsilon_t + \xi_{t-1}.$$

Именно поэтому комбинирование прогнозов не может улучшить индивидуальный прогноз  $\mu_{t-1}$ :

$$\begin{aligned} MSPE[\alpha\mu_{t-1} + (1-\alpha)g_{t-1}] &= \mathbb{E}[(\alpha\varepsilon_t + (1-\alpha)\nu_t)^2] \\ &= \mathbb{V}[\varepsilon_t] + (1-\alpha)^2\mathbb{V}[\nu_t - \varepsilon_t] \geq \mathbb{V}[\varepsilon_t] \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь мы предположили сбалансированность комбинированного прогноза, поскольку сумма весов комбинлируемых индивидуальных прогнозов равна единице. Аналогичный аргумент остается верным и в общем случае несбалансированных комбинаций с произвольными весами.

### 3 Разрешение парадокса

Возможно ли примирить теорию с наблюдаемыми эмпирическими закономерностями? Очевидным и практически тривиальным наблюдением является тот факт, что в реальных экономических приложениях мы никогда не знаем  $\mu_{t-1}$  и почти никогда не можем ее точно оценить. Заметим также, что с теоретической точки зрения данная ситуация является единственным потенциальным разрешением парадокса.

Точкой отсчета для большинства эконометрических моделей является предположение о том, что  $\mu_{t-1}$  принадлежит некоторому классу параметрических<sup>3</sup> функций аргумента  $z_{t-1} \in I_{t-1}$  и параметра  $\beta \in B \subset \mathbb{R}^p$ , которые (функции) мы будем обозначать как  $f(z_{t-1}; \beta)$ . Данная предпосылка позволяет свести сложную задачу оценивания объекта  $\mu_{t-1}$  к более простой

<sup>2</sup>Критерием качества прогноза является квадратичная функция потерь – стандартный критерий в эконометрике и прогнозировании в частности. В условиях квадратичной функции потерь лучший прогноз минимизирует среднеквадратическую ошибку прогноза – выборочный аналог среднеквадратического отклонения.

<sup>3</sup>Альтернативным подходом является более гибкое непараметрическое оценивание. Есть основание полагать, что непараметрические методы могут иметь лучшие прогнозирующие качества по сравнению с нелинейными параметрическими моделями.

задаче оценивания вектора параметров  $\beta$ . Однако в этом случае нам будет известна лишь оценка  $\hat{\mu}_{t-1} = f(z_{t-1}; \hat{\beta}) \neq \mu_{t-1}$ , а, следовательно, вышеизложенные теоретические результаты для  $\mu_{t-1}$  уже не должны выполняться для  $\hat{\mu}_{t-1}$ . Тем не менее, если мы можем достоверно оценить  $\beta$ , а функция  $f(z_{t-1}; \cdot)$  является непрерывной, то при достаточно большом размере выборки наши теоретические результаты должны быть приблизительно верными и для  $\hat{\mu}_{t-1}$ .

Таким образом, анализируемый парадокс можно описать следующим образом:

- Оценка предсказуемой компоненты  $\hat{\mu}_{t-1} = f(\{\cdot\}; \hat{\beta})$  для класса сложных нелинейных функций  $\{f(\{\cdot\}; \cdot)\}$  хорошо описывает процесс, генерирующий данные, внутри выборки, однако при этом имеет низкую вневыборочную прогнозирующую силу;<sup>4</sup>
- Комбинирование прогнозов, полученных на основе различных методов оценивая  $\mu_{t-1}$  (в том числе из разных параметрических классов), позволяет повысить предсказательную силу прогноза вне выборки.

Ниже представлен ряд теоретических аргументов, которые потенциально могут объяснить эти два наблюдения.

### Устойчивость к неверной спецификации модели

Истинная функция  $f(z_{t-1}; \beta)$  вполне может быть нелинейной по параметрам  $\beta$ . При этом данная функция может оказаться весьма сложной и, как следствие, не принадлежать никакому стандартному параметрическому классу.<sup>5</sup>

Таким образом, модели из стандартных параметрических классов являются лишь приближением истинного процесса, генерирующего данные. Тем не менее, они могут частично отражать некоторые нелинейные характеристики процесса, что позволяет данным моделям иметь описательное преимущество внутри выборки над более простыми линейными моделями.

Несмотря на это, линейные модели обладают большей гибкостью. Более формально, они являются устойчивыми к неправильной спецификации функциональной формы модели. Это, в свою очередь, может приводить к более высокому качеству вневыборочного прогноза.

Отметим также, что согласно разложению Вольда<sup>6</sup>, любой стационарный процесс имеет линейное представление в виде бесконечного скользящего среднего (MA( $\infty$ )) с некоррелированными инновациями. Из этого следует, что линейные модели временных рядов являются достаточно разумным приближением истинного процесса. В то же время, нелинейные модели при заданном количестве параметров могут иметь как слишком мало, так и слишком много степеней свободы, что может приводить к низкой вневыборочной предсказательной силе. При этом слишком большое число степеней свободы может быть даже хуже, чем слишком маленькое.

Например, рассмотрим задачу прогнозирования «белого шума». Практически любой параметрический класс включает белый шум, как частный случай. Несмотря на это, нелинейные модели, как правило, способны отыскивать «закономерности» и «предсказывать» белый шум внутри выборки. При этом качество вневыборочного прогноза становится намного хуже, чем у простых линейных моделей, которые правильно делают выбор в пользу непредсказуемого белого шума даже внутри выборки.<sup>7</sup>

<sup>4</sup>Следует отметить, что гипотеза линейности нередко отвергается внутри выборки, но, несмотря на это, линейная модель по-прежнему лучше предсказывает вне выборки.

<sup>5</sup>Данное предположение кажется вполне оправданным, особенно если учесть скудность существующих нелинейных моделей временных рядов: билинейные модели, пороговые авторегрессии, модели с марковскими переключениями, модели с ненаблюдаемыми компонентами и несколько других реже используемых моделей.

<sup>6</sup>См., например, учебник Гамильтона по временным рядам (Hamilton, 1994).

<sup>7</sup>Другим примером может стать случай нестационарного временного ряда с детерминированным трендом

## Погрешности и смещенность оценивания

Оценивание нелинейных моделей может представлять собой еще одну проблему. В большинстве случаев нелинейные модели не могут быть оценены с высокой степенью точности, по крайней мере, для макроэкономических данных. Как правило, нелинейные модели по сравнению с линейными с тем же количеством параметров требуют существенно больших размеров выборки для получения аналогичной точности оценивания. Более того, наименее точно оцениваются именно те параметры, которые делают модель нелинейной.

Данный факт может иметь следующее интуитивное пояснение. Многие нелинейные классы включают простую линейную модели в качестве частного случая. Однако, если при этом линейная модель истинна, часть параметров нелинейной модели не могут быть идентифицированы (как, например, это происходит в случае пороговой авторегрессии, см. ниже). Если же линейная модель просто является хорошим приближением, то ряд параметров в нелинейной модели могут оказаться слабо идентифицированными.

Данная проблема, как правило, не приводит к снижению качества внутривыборочной подгонки модели. Тем не менее, низкая точность оценки параметров может привести к очень низким вневыборочным прогнозирующим характеристикам модели. Как было показано в эмпирической работе Стоком и Уотсоном (Stock & Watson, 1999), нелинейные модели нередко дают абсолютно неадекватные прогнозы, что достаточно редко случается с линейными моделями. Данное наблюдение, скорее всего, объясняется низкой точностью оценки параметров нелинейной модели, в результате чего нелинейные модели могут выдавать «дикие» прогнозы, особенно если текущая ситуация была нетипичной для выборки.

Таким образом, даже при полностью верной спецификации нелинейной модели из-за неточности оценивания параметров она может давать прогнозы более низкого качества, чем простая линейная модель, параметры которой (являющиеся коэффициентами линейной проекции) оценены точно. Кроме того, линейные модели, как правило, являются более устойчивыми к ошибкам оценивания и выбросам в данных.

Аналогичную проблему представляет собой смещение оцененных параметров нелинейных моделей. Обычно это смещение является значительным в небольших выборках. Все вычисления в предыдущем разделе, очевидно, опирались на то, что  $\mu_{t-1}$  является несмещенным прогнозом; в противном случае свойства оптимальности  $\mu_{t-1}$  не выполняются. Даже в условиях верной спецификации нелинейной модели, значительные смещения в конечных выборках могут приводить к большим *MSPE* нелинейных моделей по сравнению с линейными.

Следует отметить, что если линейная модель является лишь приближением, ее коэффициенты зачастую не имеют существенной экономической интерпретации. Тем не менее, они имеют точные аналоги в популяции – коэффициенты теоретической линейной проекции. Эти коэффициенты, как правило, могут быть оценены с высокой точностью и без значительных смещений даже в небольших выборках. Таким образом, прогнозы линейных моделей могут быть очень близкими к популяционным прогнозам, основанным на линейной проекции.

Также важно отметить, что присутствие значительных смещений при оценивании параметров может являться одной из важных причин, приводящих к значительным преимуществам комбинированных прогнозов над индивидуальными. В условиях, когда различные модели дают не слишком сильно коррелированные смещения, комбинирование прогнозов может уменьшать *MSPE* просто за счет снижения этих смещений.

сложной функциональной формы. Очевидно, что простая модель линейного тренда будет доминироваться более сложными полиномами внутри выборки. При этом с большой вероятностью линейная модель побьет любой полином во вневыборочном прогнозировании.

## Структурные сдвиги и дрейф

Другим свойством экономических временных рядов, потенциально приводящим к наблюдаемым закономерностям, могут являться структурные сдвиги или дрейф в параметрах модели. Даже незначительные сдвиги в параметрах истинного процесса могут приводить к большим погрешностям при прогнозировании с помощью нелинейных моделей, оцененных по выборке до структурного сдвига.

Линейные модели нередко оказываются более устойчивыми к различным структурным сдвигам в параметрах истинного процесса. Именно этот факт, вероятно, объясняет, почему качество прогнозов нелинейных моделей резко ухудшается с ростом горизонта прогнозирования. Так, Сток и Уотсон (Stock & Watson, 1999) демонстрируют, что нелинейные модели дают неплохие прогнозы, сравнимые с прогнозами линейных моделей или даже лучше, на один-два шага вперед, однако прогнозы резко ухудшаются с ростом горизонта и становятся существенно хуже прогнозов линейных моделей.

## Комбинирование прогнозов

Любые оцениваемые модели являются лишь приближением к истинному процессу, генерирующему данные. Даже в том случае, когда нелинейная модель правильно специфицирована, неточности оценивания и смещение в конечных выборках, наряду с потенциальными структурными сдвигами в параметрах модели, приводят к существенным отклонениям оцененного прогноза  $\hat{\mu}_{t-1}$  от оптимального прогноза  $\mu_{t-1}$ . В подобных условиях комбинирование прогнозов может иметь значительный потенциал в повышении качества прогнозирования.

Рассмотрим следующий пример, который во многом может мотивировать использование комбинированных прогнозов. Допустим, перед исследователем стоит проблема прогнозирования процесса, который по своей структуре является агрегатом некоторого числа микропроцессов. Например, необходимо спрогнозировать совокупное производство страны, которое складывается из региональных выпусков отдельных субъектов. В этом случае гораздо более эффективно прогнозировать каждый индивидуальный ряд по отдельности, а затем агрегировать прогнозы оптимальным образом. Теоретически это можно обосновать с помощью закона больших чисел, поскольку агрегирование индивидуальных прогнозов позволяет «диверсифицировать» ошибки и таким образом снизить погрешность.

Несмотря на то, что большинство экономических временных рядов являются агрегатами, их индивидуальные компоненты зачастую недоступны. Тем не менее, различные модели временных рядов, являясь разными приближениями истинного процесса, могут лучше или хуже описывать различные характеристики истинного процесса. В этом случае ошибки прогнозирования различных моделей могут оказаться слабо коррелированными,<sup>8</sup> а это, в свою очередь, позволяет комбинациям прогнозов превышать предсказательную силу индивидуальных прогнозов.

Напомним, что качество комбинации двух произвольных прогнозов  $g'_{t-1}$  и  $g''_{t-1}$  с ошибками  $\nu'_t$  и  $\nu''_t$  и весами  $\alpha$  и  $1 - \alpha$  соответственно может быть охарактеризовано как

$$MSPE[\alpha g'_{t-1} + (1 - \alpha)g''_{t-1}] = \alpha^2 \mathbb{V}[\nu'_t] + (1 - \alpha)^2 \mathbb{V}[\nu''_t] + 2\alpha(1 - \alpha)C[\nu'_t, \nu''_t].$$

Как видно из этой формулы, комбинация прогнозов может иметь меньший  $MSPE$  по сравнению с индивидуальными прогнозами, если ошибки двух индивидуальных прогнозов слабо коррелированы.<sup>9</sup>

<sup>8</sup>Что подтверждается в новой эмпирической работе Стока и Уотсона (Stock & Watson, 2006).

<sup>9</sup>Отрицательная корреляция ошибок прогнозов встречается крайне редко, и этот случай можно исключить из анализа практически без потери общности с точки зрения прикладного анализа.

#### 4 Численный пример

В качестве иллюстрации некоторых приведенных выше аргументов разберем один частный случай на численном примере. В качестве примера возьмем стандартную гладкопороговую авторегрессию (STAR) с меняющимся во времени авторегрессионным параметром. Пусть истинный процесс задается следующим образом:

$$y_t = (\alpha + \beta e^{-\gamma y_{t-1}^2})y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_t$  является мартингалным приращением с постоянной условной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Данный процесс не пользуется особой популярностью среди эмпирических эконометристов, однако он имеет простое содержательное обоснование и может вполне адекватно описывать некоторые эмпирические закономерности. Данный процесс позволяет временному ряду быть более связным в окрестности маленьких по абсолютной величине значений  $y_t$ , при этом связность уменьшается по мере того, как  $y_t$  растет по абсолютной величине и отклоняется от своего долгосрочного равновесного значения – безусловного математического ожидания  $\mathbb{E}[y_t] = 0$ .

Альтернативной, линейной, спецификацией является обычная авторегрессия первого порядка AR(1):

$$y_t = \rho y_{t-1} + \nu_t, \quad \rho \geq 0, \quad (2)$$

где  $\nu_t$  является ошибкой линейной проекции с некоторой условной дисперсией  $\sigma_\nu^2$ . Из теоретических соображений следует, что  $\sigma_\nu^2 \geq \sigma_\varepsilon^2$  с равенством только в случае справедливости нулевой гипотезы линейности,  $\mathbb{H}_0 : \beta = 0$ .

Ошибки прогнозирования для истинной нелинейной модели и линейного AR-приближения равны, соответственно,

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{t+1|t} &\equiv y_{t+1} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} e^{-\hat{\gamma} y_t^2}) y_t \\ &= \varepsilon_{t+1} + \left[ (\alpha - \hat{\alpha}) + e^{-\gamma y_t^2} (\beta - \hat{\beta}) + \hat{\beta} (e^{-\gamma y_t^2} - e^{-\hat{\gamma} y_t^2}) \right] y_t, \\ \hat{\nu}_{t+1|t} &\equiv y_{t+1} - \hat{\rho} y_t = \nu_{t+1} + (\rho - \hat{\rho}) y_t. \end{aligned}$$

Таким образом, приближительная (асимптотическая) среднеквадратическая ошибка прогнозирования для нелинейной модели STAR равна

$$MSPE_{T+1|T}^{STAR} = \sigma_\varepsilon^2 \left[ 1 + g'_{\theta, T+1} \left( \sum_{t=1}^{T-1} g_{\theta, t} g'_{\theta, t} \right)^{-1} g_{\theta, T+1} \right],$$

где  $g_t(\theta) \equiv (\alpha + \beta e^{-\gamma y_{t-1}^2}) y_{t-1}$ ,  $\theta \equiv (\alpha, \beta, \gamma)'$  и  $g_{\theta, t} \equiv \partial g_t(\theta) / \partial \theta'$ . Асимптотическая среднеквадратическая ошибка для AR-модели равна, соответственно,

$$MSPE_{T+1|T}^{AR} = \sigma_\nu^2 \left[ 1 + y_{T+1}^2 / \sum_{t=1}^{T-1} y_t^2 \right].$$

Отметим, что из априорных соображений невозможно упорядочить эти две среднеквадратические ошибки прогнозов. Ошибка проекции  $\nu_t$  имеет большую дисперсию, чем ошибка лучшего прогноза  $\varepsilon_t$ , однако второй элемент в формуле  $MSPE$  в квадратных скобках, связанный с погрешностями при оценивании параметров, может вполне быть больше для нелинейной модели.

Для дальнейшего анализа мы используем числовой пример, где процессом, генерирующим данные, является (1) со следующими параметрами:  $\alpha = 0,7$ ,  $\beta = 0,3$ ,  $\gamma = 0,5$  и  $\sigma_\varepsilon^2 = 0,25$ , что соответствует достаточно связному, но все же стационарному процессу.<sup>10</sup>

<sup>10</sup>При этом большинство полученных результатов являются качественно устойчивыми при значительном изменении исходных параметров.

Таблица 1: Асимптотический  $MSPE$  для разных размеров выборки

Размер выборки	$\sigma_\varepsilon^2$	STAR	AR
100	0,250	0,549	0,257
200	0,250	0,350	0,255
500	0,250	0,265	0,254
1000	0,250	0,252	0,254

Таблица 2: Качество прогноза в конечных выборках

Модель	STAR		AR	
	Внутри выборки	Вне выборки	Внутри выборки	Вне выборки
100	0,244	0,359	0,266	0,279
200	0,247	0,295	0,258	0,266
500	0,249	0,255	0,257	0,256

Мы проведем два эксперимента. Во-первых, мы оцениваем приблизительные (асимптотические)  $MSPE$  двух моделей для размеров выборки в 100, 200, 500 и 1000 наблюдений, в соответствие с приведенными выше формулами. Отметим, что эти показатели не учитывают смещенность оценок параметров в конечных выборках. Результаты первого эксперимента приведены в таблице 1. Во-вторых, мы оцениваем эмпирическую предсказательную силу двух моделей в конечных выборках: мы подсчитываем характеристики внутривыборочной подгонки данных (дисперсию ошибки внутри выборки) и характеристики ошибки вневыборочных предсказаний (дисперсию ошибки предсказания на один шаг вперед) для различного числа исходных наблюдений, используя метод Монте-Карло. Результаты второго эксперимента представлены в таблице 2. Таблица 1 наглядно демонстрирует основной вывод первого эксперимента: при небольших размерах выборки линейная модель бьет истинную нелинейную модель. Это результат неточности оценивания параметров нелинейной модели – данная нелинейная модель требует более 500 наблюдений для достаточно точной оценки параметров, чтобы превзойти линейную модель по показателю  $MSPE$ . Параметры же линейной модели оцениваются с очень высокой точностью даже при выборках в 100 наблюдений. Из таблицы 2 можно сделать два важных наблюдения. Во-первых, внутривыборочная подгонка истинной нелинейной модели всегда лучше подгонки линейной проекции. Это очевидный факт, поскольку линейная проекция является ограниченной версией исходной модели. Более того, внутривыборочная подгонка для оцененной нелинейной модели превосходит даже истинный процесс, генерирующий данные (другими словами, нелинейную модель с истинными коэффициентами), для которого ошибка подгонки равна  $\sigma_\varepsilon^2 = 0,25$ . Этот любопытный факт сродни описанному выше примеру, в котором нелинейные модели способны отыскивать закономерности при описании белого шума. Также отметим, что данное отличие во внутривыборочной подгонке данных приводит к отклонению гипотезы линейности в пользу принятия истинной модели.<sup>11</sup>

Во-вторых, вневыборочная предсказательная сила (среднее квадрата ошибки прогноза на один шаг вперед по большому количеству симуляций) нелинейной модели ниже предсказательной силы линейной модели при умеренных размерах выборки (менее 500 наблюдений).

<sup>11</sup>Формальный тест на линейность имеет вид  $\sup LR$  статистики, распределение которой принадлежит к семейству  $\chi^2$ -функционалов (Hansen, 1996). Значение этой статистики равно 91,7 уже при 100 наблюдениях, что существенно превосходит критические значения.

Это уже не такой очевидный факт. Заметим также, что качество прогноза нелинейной модели существенно снижается при размерах выборки менее 200 наблюдений, в то время как качество линейной модели практически не меняется. Кроме того, примечательно, что линейная модель дает примерно одинаковое качество как внутривыборочной, так и вневыборочной подгонки данных, в то время как для нелинейной модели расхождение качества внутривыборочной и вневыборочной подгонки является очень значительным.

Также заметим, что корреляция между ошибками прогнозов двух рассматриваемых моделей составляет более 0,8, что практически не позволяет улучшить итоговый прогноз при помощи комбинирования двух моделей. Это и неудивительно, поскольку обе модели являются очень хорошими и достаточно точными приближениями к истинному процессу.

Таким образом, данный простой пример позволяет наглядно проиллюстрировать многие из вышеизложенных теоретических гипотез.

## 5 Заключение

Данная работа является небольшим шагом к объяснению двух парадоксальных эмпирических закономерностей в области прогнозирования экономических временных рядов. Мы попытались изложить ряд теоретических гипотез, объясняющих, почему простые линейные модели зачастую обладают преимуществом в предсказательной силе над более сложными нелинейными моделями, позволяющими, в свою очередь, получить более точную внутривыборочную подгонку данных. Оказывается, многие из этих гипотез позволяют также объяснить, почему комбинирование индивидуальных прогнозов может улучшать их предсказательную силу.

Обобщая все вышеизложенное, можно подвести итог, что преимущество линейных моделей происходит из-за их общей «робастности» – устойчивости к неверной спецификации модели, устойчивости к смещению и неточности при оценивании, устойчивости к структурным сдвигам и дрейфу параметров модели.

Комбинирование прогнозов может быть оптимальным в условиях, когда все индивидуальные модели являются несовершенным приближением истинного процесса. Кроме того, вероятно, во многих ситуациях сам прогнозируемый процесс является комбинацией более простых микропроцессов.

Предложенный численный пример иллюстрирует теоретические гипотезы. Результаты численного анализа внушают оптимизм по поводу высказанных теоретических идей. Дальнейшие исследования данной проблемы должны выявить конкретные механизмы, которые могут стоять за предложенными гипотезами, а также оценить важность этих механизмов эмпирически.

## Благодарности

Автор благодарен Джеймсу Стоку за постановку проблемы, анализируемой в работе, и Станиславу Анатольеву за ознакомление с основами современной эконометрики, а также за помощь при переводе и редактировании текста.

## Список литературы

- Bates, J. & C. Granger (1969). The combination of forecasts. *Operations Research Quarterly* 20, 451–468.
- Chan, K. (1990). Testing for threshold autoregression. *Annals of Statistics* 18, 1886–1894.
- Granger, C. & P. Newbold (1977). *Forecasting Economic Time Series*. New York: Academic Press.
- Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press.

Hansen, B. (1996). Inference when a nuisance parameter is not identified under the null. *Econometrica* 64, 413–430.

Stock, J. & M. Watson (1999). A comparison of linear and nonlinear univariate models for forecasting macroeconomic time series. Глава 1 в R. Engle & H. White (eds.). *Cointegration, Causality and Forecasting: A Festschrift for Clive W.J. Granger*. Oxford: Oxford University Press, 1–44.

Stock, J. & M. Watson (2006). Forecasting with many predictors. Глава в G. Elliott, C. Granger, A. Timmermann, K. Arrow & M. Intriligator (eds.). *Handbook of economic forecasting*. Elsevier: North Holland.

## Model selection and paradoxes of prediction

Oleg Itskhoki

*Harvard University, Cambridge, USA*

*Central Economics & Mathematics Institute, Moscow, Russia*

In this essay we postulate a number of theoretical hypotheses allowing one to resolve in some degree the following two prediction paradoxes: (1) why simple linear models often have an advantage in predictive power over more complex nonlinear models that lead to a better in-sample fit; (2) why combinations of forecasts often increase the predictive power of individual forecasts. We also give a numerical example illustrating our theoretical statements.



# Парные тесты на одинаковую точность прогнозов\*

Майкл Маккракен†

*Федеральное резервное управление, Вашингтон, США*

В настоящем эссе обсуждаются последние достижения, связанные с тестированием на равную точность прогнозов между невложенными или вложенными моделями. Наряду с некоторыми техническими деталями даны рекомендации по практической реализации тестирования.

## 1 Введение

Иногда в практической работе встречаются ситуации, когда в наличии имеются более одной прогнозирующей модели. В экономике и финансах такая ситуация возникает часто, ибо разные теории о поведении экономических агентов приводят к разным выводам о том, какие переменные и модели имеют предсказательный смысл для ряда экономических переменных. Имея прогнозы из разных моделей, интересно знать, предсказывает ли одна из моделей более точно, чем другая, и если да, является ли разница статистически значимой.

Имеется множество способов это осуществить. Наиболее популярным является внутривыборочная диагностика (F-тест и тест отношения правдоподобия) с целью определить, какая из моделей более точно ложится на данные. В последнее время, однако, становится более популярным оценивать предсказательный смысл моделей, используя вневыборочные методы. В их рамках прогнозы генерируются из «вневыборочной» порции наблюдаемых данных, а результирующие ошибки прогнозов оцениваются с использованием статистических методов.

Для ситуаций, когда две модели являются невложенными, а параметры моделей известны заранее, Diebold & Mariano (1995) предложили способы построения тестов на равную точность прогнозов между невложенными моделями при различных функциях потерь. Когда параметры моделей заранее не известны, а должны оцениваться, West (1996) предоставил аналитический инструментарий, который можно использовать и для построения тестов на равную точность прогнозов между невложенными моделями. Его результаты близки к результатам Diebold & Mariano (1995), но явным образом учитывают дополнительную вариацию в ошибках прогнозов, вызванную оцениванием параметров. West (1996), правда, требует, чтобы функция потерь, используемая для измерения точности прогнозов, была непрерывно дифференцируемой. McCracken (2000) обобщил результаты West (1996) на случаи, когда функция потерь не является непрерывно дифференцируемой.

Если же две рассматриваемые модели являются вложенными, результаты в Diebold & Mariano (1995), West (1996) и McCracken (2000) неверны. А именно, в то время как типичная тестовая статистика на равную точность прогнозов между невложенными моделями имеет нормальное асимптотическое распределение, в Clark & McCracken (2001, 2005) и McCracken (2006) показано, что эти же тестовые статистики при вложенности моделей имеют асимптотические нестандартные распределения, представимые как функционалы от Броуновских движений.

В этом эссе мы обсуждаем результаты перечисленных выше статей. Хотя мы обсуждаем и некоторые технические предположения, по большей части мы концентрируем усилия на описании практических аспектов построения тестовых статистик и получения асимптотически

\*Перевод С. Анатольева. Цитировать как: Маккракен, Майкл (2006) «Парные тесты на одинаковую точность прогнозов», Квантиль, №1, стр. 53–62. Citation: McCracken, Michael (2006) “Pairwise tests of equal forecast accuracy,” *Quantile*, No.1, pp. 53–62.

†Адрес: Federal Reserve Board of Governors, 20th and Constitution N.W., Washington D.C. 20551, USA. Электронная почта: [michael.w.mccracken@frb.gov](mailto:michael.w.mccracken@frb.gov)

Таблица 1: Функции потерь

Название	Функция потерь для модели $i$
Квадратичная	$(y_{t+\tau} - x'_{i,t}\beta_i)^2$
Абсолютная	$ y_{t+\tau} - x'_{i,t}\beta_i $
Абсолютная $\alpha$ -процентная	$ y_{t+\tau} - x'_{i,t}\beta_i ((1 - \alpha)\mathbb{I}(y_{t+\tau} - x'_{i,t}\beta_i < 0) + \alpha\mathbb{I}(y_{t+\tau} - x'_{i,t}\beta_i \geq 0))$
Линейно-экспоненциальная	$\exp(\alpha(y_{t+\tau} - x'_{i,t}\beta_i)) - \alpha(y_{t+\tau} - x'_{i,t}\beta_i) - 1$
Скоринговая	$\mathbb{I}(L(y_{t+\tau} - x'_{1,t}\beta_1) \leq L(y_{t+\tau} - x'_{2,t}\beta_2)) - 0.5$

верных критических значений, необходимых для реализации тестирования. Ради простоты изложения мы используем линейные многогоризонтные регрессионные модели на стационарных временных рядах, оцениваемые с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Эссе организовано следующим образом. В разделе 2 мы опишем основы вневыборочной методологии и введем минимально необходимые обозначения. В разделе 3 мы обсудим, как построить тесты на равную точность прогнозов между двумя невложенными моделями, а в разделе 4 перейдем к вложенным моделям. Последний раздел содержит некоторые выводы.

## 2 Постановка

Стационарные наблюдения  $\{y_t, x'_t\}_{t=1}^{T+\tau}$  включают скалярную случайную величину  $y_t$ , которую будем предсказывать, и  $k$ -мерный вектор потенциальных предикторов  $x_t = (x'_{1,t}, x'_{2,t})'$ . Выборка разделена на внутривыборочную и вневыборочную порции. Внутривыборочная порция содержит наблюдения с 1 по  $R$ . Пусть  $P$  обозначает количество  $\tau$ -шаговых ( $1 \leq \tau$ ) прогнозов. Вневыборочная порция содержит наблюдения с  $R + \tau$  по  $R + P + \tau - 1 = T + \tau$ . Обозначим  $\pi = \lim(P/R)$  при  $T \rightarrow \infty$ .

Прогнозы  $y_{t+\tau}$ ,  $t = R, \dots, T$ , генерируются с использованием двух линейных моделей в форме  $x'_{i,t}\beta_i^*$  ( $i = 1, 2$ ), каждая из которых оценивается с помощью МНК. Прогнозы могут быть рекурсивными, скользящими или фиксированными. При рекурсивной схеме параметры каждой модели переоцениваются по мере того, как прогнозирование смещается во времени: для  $t = R, \dots, T$  прогноз  $y_{t+\tau}$  от  $i$ -й модели,  $x'_{i,t}\hat{\beta}_{i,t}$ , строится с использованием оценок параметров

$$\hat{\beta}_{i,t} = \left( \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t-\tau} x_{i,s} x'_{i,s} \right)^{-1} \left( \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t-\tau} x_{i,s} y_{s+\tau} \right).$$

Для остальных схем прогнозы в момент  $t$  строятся похожим образом с использованием либо скользящего окна из последних  $R$  наблюдений  $s = t - R + 1, \dots, t$ , либо начальных  $R$  наблюдений  $s = 1, \dots, R$  для скользящей и фиксированной схем соответственно.

Обозначим оцененные  $\tau$ -шаговые ошибки прогнозов как  $\hat{u}_{i,t+\tau} = y_{t+\tau} - x'_{i,t}\hat{\beta}_{i,t}$  ( $i = 1, 2$ ). Эти ошибки, только с использованием популяционных значений параметров, обозначим как  $u_{i,t+\tau} = y_{t+\tau} - x'_{i,t}\beta_i^*$  с соответствующими значениями потерь  $L(\hat{u}_{i,t+\tau})$  ( $i = 1, 2$ ). Примеры наиболее часто используемых функций потерь приведены в таблице 1.

Выбрав функцию потерь и имея две последовательности потерь, по одной для каждой из моделей, мы хотим построить тест на одинаковую предсказательную точность этих моделей. А именно, мы хотим протестировать нулевую гипотезу

$$H_0 : \mathbb{E}[L(u_{1,t+\tau})] - \mathbb{E}[L(u_{2,t+\tau})] = 0$$

для всех  $t$ . Естественной отправной точкой для построения теста на одинаковую точность прогнозов – рассмотреть поведение вневыборочного среднего разницы потерь

$$P^{-1} \sum_{t=R}^T [L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau})].$$

Интуитивно ясно, что если это среднее «велико» и положительно в какой-то метрике, мы сделаем вывод, что модель 2 более точная, чем модель 1, и наоборот, если это среднее отрицательно. В противном случае, если это среднее «мало», мы сделаем вывод, что разница статистически не значима, и модели эквивалентны по точности прогнозирования.

К сожалению, уже в данный момент становится важным различать между невложенными и вложенными моделями. В частности, асимптотическое распределение, используемое для определения, насколько «велика» средняя разница потерь, зависит от того, вложены модели или нет.

### 3 Невложенные модели

Для последовательностей прогнозов от двух невложенных моделей Diebold & Mariano (1995) и West (1996) рассматривают асимптотическое распределение t-статистики в форме

$$P^{1/2} \frac{P^{-1} \sum_{t=R}^T [L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau})]}{\hat{\Omega}_T^{1/2}}, \quad (1)$$

где  $\hat{\Omega}_T$  обозначает состоятельную оценку асимптотической дисперсии средней разницы потерь  $\Omega \equiv \lim Var(P^{-1/2} \sum_{t=R}^T [L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau})])$ . В обеих статьях авторы показывают, что статистика асимптотически стандартно нормальная. Числитель (1) легко построить. Тяжелее сконструировать подходящую оценку  $\Omega$ . Ниже мы обсуждаем некоторые асимптотически адекватные методы.

#### Diebold & Mariano (1995)

Простейшая ситуация – это когда вопреки постановке предыдущего раздела параметры известны заранее и их не нужно оценивать. В контексте параметрического предсказания такое вряд ли возможно. Тем не менее, если «моделью» является мнение из опроса профессиональных предсказателей или же финансовое трейдинговое правило, в ней действительно нет параметров, которые надо было бы оценивать.

Этот особый случай является простейшим, поскольку он означает, что мы наблюдаем, а не оцениваем, популяционные значения ошибок прогнозов. Это означает не только то, что  $L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau}) = L(u_{1,t+\tau}) - L(u_{2,t+\tau})$ , но и то, что на долгосрочную дисперсию  $L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau})$  не влияет неопределенность, вызванная ошибкой оценивания параметров. Правильно оценить  $\Omega$  просто, если учесть возможную серийную корреляцию в разнице потерь. Например, строя  $\tau$ -шаговые прогнозы, мы ожидаем серийную корреляцию порядка по крайней мере  $\tau - 1$  в  $L(u_{1,t+\tau}) - L(u_{2,t+\tau})$ . В такой ситуации можно использовать стандартные непараметрические ядерные оценки, с ядрами типа Бартлетовского или квадратично-спектрального, для состоятельного оценивания долгосрочной дисперсии.

#### West (1996)

Оценивать  $\Omega$  становится сложнее, когда прогнозы строятся на основе параметрических моделей с оцениваемыми параметрами. Как отмечено выше, ключевым отличием является то, что

при оцениваемых параметрах мы не наблюдаем популяционные значения ошибок прогнозов  $u_{i,t+\tau}$ , а наблюдаем их оценки  $\hat{u}_{i,t+\tau}$ . Эта маленькая разница означает, что

$$\Omega \equiv \lim \mathbb{V} \left( P^{-1/2} \sum_{t=R}^T [L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau})] \right)$$

необязательно равна

$$\lim \mathbb{V} \left( P^{-1/2} \sum_{t=R}^T [L(u_{1,t+\tau}) - L(u_{2,t+\tau})] \right).$$

Эта мысль подчеркивалась явным образом в West (1996) и была развита далее в McCracken (2000). А именно, West (1996) показал, как подобающим образом построить  $\Omega$ , когда функция потерь дважды непрерывно дифференцируема, как в случае квадратичных и линейно-экспоненциальных потерь из таблицы 1. McCracken (2000) расширил теорию для случая остальных функций потерь из таблицы 1.

Ключевым элементом обоих результатов является асимптотическое разложение с двумя раздельными компонентами: одна компонента включает ошибки прогнозов популяционного уровня, а вторая обусловлена тем, что параметры неизвестны и оцениваются. Чтобы понять смысл этого разложения, сначала рассмотрим нормализованную среднюю разницу потерь

$$P^{-1/2} \sum_{t=R}^T [L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau})],$$

и вспомним обсуждение из раздела 2, где мы ограничились рассмотрением прогнозов, порожденных линейными многогоризонтными моделями, оцененными с помощью МНК. Определим  $k \times 1$  вектор,  $k \times k$  матрицу и  $k \times 1$  вектор-функцию

$$F = (\partial \mathbb{E}[L(y_{t+\tau} - x'_{1,t}\beta_1)] / \partial \beta'_1 |_{\beta_1 = \beta_1^*}, -\partial \mathbb{E}[L(y_{t+\tau} - x'_{2,t}\beta_2)] / \partial \beta'_2 |_{\beta_2 = \beta_2^*})',$$

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[x_{1,t}x'_{1,t}]^{-1} & 0_{k_1 \times k_2} \\ 0_{k_2 \times k_1} & \mathbb{E}[x_{2,t}x'_{2,t}]^{-1} \end{pmatrix},$$

$$H(t) = \begin{cases} (t^{-1} \sum_{s=1}^{t-\tau} h'_{1,s+\tau}, t^{-1} \sum_{s=1}^{t-\tau} h'_{2,s+\tau})' & \text{для рекурсивной схемы,} \\ (R^{-1} \sum_{s=t-R+1}^{t-\tau} h'_{1,s+\tau}, R^{-1} \sum_{s=t-R+1}^{t-\tau} h'_{2,s+\tau})' & \text{для скользящей схемы,} \\ (R^{-1} \sum_{s=1}^{R-\tau} h'_{1,s+\tau}, R^{-1} \sum_{s=1}^{R-\tau} h'_{2,s+\tau})' & \text{для фиксированной схемы,} \end{cases}$$

где  $h_{i,s+\tau} = u_{i,s+\tau}x_{i,s}$  ( $i = 1, 2$ ). Используя эти обозначения, West (1996) и McCracken (2000) показывают, что

$$P^{-1/2} \sum_{t=R}^T [L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau})] = P^{-1/2} \sum_{t=R}^T [L(u_{1,t+\tau}) - L(u_{2,t+\tau})] + FBP^{-1/2} \sum_{t=R}^T H(t) + o_p(1). \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части (2) – это разница потерь, которая возникла бы, если бы параметры были известны заранее и не оценивались бы. Второе слагаемое в правой части (2) возникло из-за того, что параметры неизвестны и оцениваются. Каждое из этих двух слагаемых может внести свой вклад в предельную дисперсию в (1). Пусть  $h_{t+\tau} = (h'_{1,t+\tau}, h'_{2,t+\tau})'$ , и обозначим за  $S$  долгосрочную дисперсию  $(L(u_{1,t+\tau}) - L(u_{2,t+\tau}), h'_{t+\tau})'$  с блочно-диагональными элементами  $S_{dd}$  и  $S_{hh}$  и внедиагональным элементом  $S_{dh}$ . При дополнительных мягких предположениях

$$P^{-1/2} \sum_{t=R}^T [L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau})]$$

сходится по распределению к нормальной случайной величине с предельной дисперсией

$$\Omega = S_{dd} + 2\lambda_{dh}(FBS'_{dh}) + \lambda_{dd}(FBS_{hh}B'F'), \quad (3)$$

где

Схема	$\lambda_{dh}$	$\lambda_{hh}$
Рекурсивная	$1 - \pi^{-1} \ln(1 + \pi)$	$2[1 - \pi^{-1} \ln(1 + \pi)]$
Скользкая с $\pi \leq 1$	$\pi/2$	$\pi - \pi^2/3$
Скользкая с $1 < \pi < \infty$	$1 - 1/2\pi$	$1 - 1/3\pi$
Фиксированная	0	$\pi$

Из равенства (3) ясно, что оценивание параметров может повлиять на предельную дисперсию вневыборочных тестовых статистик. Первая компонента в правой части  $\Omega$ ,  $S_{dd}$ , – это как раз предельная дисперсия, предложенная в Diebold & Mariano (1995) для тестирования на одинаковую точность прогнозов, когда параметры известны заранее. Если остальные слагаемые сокращаются и  $\Omega = S_{dd}$ , мы говорим, что ошибка оценивания параметров асимптотически нерелевантна.

В общем случае, однако, ошибка оценивания релевантна. Вторая и третья компоненты (3) появляются именно благодаря тому, что параметры неизвестны и оцениваются. Дополнительная вариация из-за ошибки оценивания – это слагаемое  $FBP^{-1/2} \sum_{t=R}^T H(t)$  в равенстве (2). Эта вариация порождает дополнительную дисперсионную компоненту  $\lambda_{hh}(FBS_{hh}B'F')$  и дополнительную ковариационную компоненту  $2\lambda_{dh}(FBS'_{dh})$  в  $\Omega$ . Эти две компоненты и являются источником беспокойства. Если их игнорировать, тесты нулевой гипотезы будут иметь неверный размер и пониженную мощность.

Теперь мы очертим четыре различных способа, с помощью которых можно учесть ошибку оценивания параметров.

### Случай 1: $F = 0$

Временами можно показать, что дополнительная вариация из-за ошибки оценивания параметров асимптотически нерелевантна. Так как в данном обсуждении мы предполагаем, что параметры модели состоятельно оцениваются МНК, это означает, что  $F = 0$ , если мы оцениваем точность прогнозов, используя квадратичные потери.

### Случай 2: $\pi = 0$

Другой важный случай, когда ошибки оценивания параметров асимптотически нерелевантны, встречается при  $\pi = 0$ . Заметим, что когда  $\pi = 0$ , и  $\lambda_{dh}$ , и  $\lambda_{hh}$  – нули. Если это имеет место, второе и третье слагаемые в правой части (3) равны нулю. На практике такая ситуация никогда не встречается, т.к.  $P$  и  $R$  – конечные положительные целые числа. Но иногда может быть разумным считать отношение  $P/R$  достаточно близким к нулю, так что результат будет следовать по непрерывности. Этот аргумент приводится в явном виде в Chong & Hendry (1986).

### Случай 3: рекурсивная схема и $FBS'_{dh} = -FBS_{hh}BF'$

Третья и наименее очевидная ситуация, когда ошибки оценивания параметров могут быть асимптотически нерелевантны, встречается, когда второе и третье слагаемые в правой части (3) в сумме дают нуль при том, что каждое из них не равно нулю. Заметим, что  $2\lambda_{dh} = \lambda_{hh}$  для рекурсивной схемы. Из-за этого в тестах, где  $FBS'_{dh} = -FBS_{hh}BF'$ , ошибки оценивания параметров асимптотически нерелевантны, когда используется рекурсивная схема.

Эта ситуация иногда встречается и в других вневыборочных тестах на прогнозирующую способность, таких как на равенство нулю средней ошибки прогноза или серийной корреляции одношаговых ошибок прогнозов, но реже встречается при тестировании на равную предсказательную точность. В любом случае такое сокращение происходит только для определенных процессов, порождающих данные, и никогда не происходит при использовании скользящих и фиксированных схем.

#### Случай 4: оценивание $\Omega$

Самый непосредственный способ скорректировать на ошибки оценивания параметров – попросту построить состоятельную оценку  $\Omega$  и использовать ее в знаменателе  $t$ -статистики в (1). Все компоненты  $\Omega$  оцениваются напрямую. Например,  $\hat{B} = \text{diag}((P^{-1} \sum_{t=R}^T x_{1,t} x'_{1,t})^{-1}, (P^{-1} \sum_{t=R}^T x_{2,t} x'_{2,t})^{-1})$  формируют состоятельную оценку  $B$ . Так как  $\lambda_{dh}$  и  $\lambda_{hh}$  – непрерывные функции от  $\pi = \lim(P/R)$ , их можно оценить, подставляя  $P/R$  вместо  $\pi$ .

Члены  $S_{dd}$ ,  $S_{dh}$  и  $S_{hh}$  требуют знания того, какие используются данные, но в остальном это непосредственно долгосрочные ковариации. Например, если мы строим  $\tau$ -шаговые прогнозы, мы ожидаем серийную корреляцию порядка  $\tau - 1$  и в  $L(u_{1,t+\tau}) - L(u_{2,t+\tau})$ , и в  $h_{t+\tau}$ . В такой ситуации стандартные непараметрические ядерные оценки, с ядрами типа Бартлетовского или квадратично-спектрального, могут быть использованы для состоятельного оценивания долгосрочных ковариаций  $S_{dd}$ ,  $S_{dh}$  и  $S_{hh}$ . В частности, West (1996), West & McCracken (1998) и McCracken (2000) показывают, как последовательность оцененных разниц потерь  $L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau})$ ,  $t = R, \dots, T$ , и последовательность оцененных условий ортогональности  $\hat{h}_{t+1} = (\hat{u}_{1,t+\tau} x'_{1,t}, \hat{u}_{2,t+\tau} x'_{2,t})'$ , можно использовать как если бы они являлись соответствующими популяционными значениями. Поэтому состоятельные оценки для  $S_{dd}$ ,  $S_{dh}$  и  $S_{hh}$  легко получаются при помощи стандартных процедур (например, Newey & West, 1987).

Наиболее сложный аспект оценивания  $\Omega$  с использованием равенства (3) – это, возможно, построение состоятельной оценки  $F$ . В случаях, когда функция потерь дифференцируема, это просто. Например, положим, что потери измеряются линейно-экспоненциальной функцией. В этом случае можно использовать

$$\hat{F} = \left( P^{-1} \sum_{t=R}^T \alpha (1 - \exp(\alpha \hat{u}_{1,t+\tau})) x'_{1,t}, -P^{-1} \sum_{t=R}^T \alpha (1 - \exp(\alpha \hat{u}_{2,t+\tau})) x'_{2,t} \right)'$$

в качестве оценки  $F$ .

Когда функция потерь недифференцируема, оценивание  $F$  может усложниться. Не очень сложным случаем являются абсолютные потери. Когда абсолютное значение ошибки является мерой потерь, McCracken (2000) показывает, что  $F = (\mathbb{E}[\text{sgn}(u_{1,t+\tau}) x'_{1,t}], -\mathbb{E}[\text{sgn}(u_{2,t+\tau}) x'_{2,t}])$ , и более того, что

$$\hat{F} = \left( P^{-1} \sum_{t=R}^T \text{sgn}(\hat{u}_{1,t+\tau}) x'_{1,t}, -P^{-1} \sum_{t=R}^T \text{sgn}(\hat{u}_{2,t+\tau}) x'_{2,t} \right)'$$

является состоятельной оценкой  $F$ .

## 4 Вложенные модели

Для последовательностей прогнозов от двух вложенных моделей, Clark & McCracken (2001, 2005) рассматривают асимптотическое распределение двух различных статистик, которые можно использовать для тестирования равной точности прогнозов. Первая статистика – та же, что использовалась для невложенного случая, а вторая – новая:

$$P^{1/2} \frac{P^{-1} \sum_{t=R}^T [L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau})]}{\hat{\Omega}_T^{1/2}}, \quad 2P \frac{P^{-1} \sum_{t=R}^T [L(\hat{u}_{1,t+\tau}) - L(\hat{u}_{2,t+\tau})]}{\hat{c}} \quad (4)$$

для скалярного  $\hat{c}$ , зависящего от функции потерь  $L(\cdot)$ .

Поскольку первая статистика в (3) идентична той, что использовалась в для невложенного случая, можно подумать, что она асимптотически нормальна. Однако это не так. Ненормальность асимптотического распределения происходит из того, что при нулевой гипотезе не только  $\mathbb{E}[L(u_{1,t+\tau}) - L(u_{2,t+\tau})] = 0$ , но в больших выборках  $u_{1,t+\tau} = u_{2,t+\tau}$ , и поэтому  $L(u_{1,t+\tau}) - L(u_{2,t+\tau}) = 0$ . Отсюда следует, что  $\Omega = 0$ , и поэтому асимптотическая теория, разработанная для невложенного случая, требующего положительности  $\Omega$ , не переносится на вложенный случай.

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций потерь и одношагового прогнозирования на основе потенциально нелинейных моделей McCracken (2006) выводит асимптотическое распределение этих двух статистик. Эти распределения не нормальны, но представимы как функционалы от Броуновского движения. Более того, они зависят от используемой функции потерь в том смысле, что нормирующая константа  $\hat{c}$  от нее зависит.

В дальнейшем мы подробно рассмотрим эти статистики в сочетании с использованием популярной квадратичной функции потерь  $L(u) = u^2$ . В частности, Clark & McCracken (2005) выводят асимптотические распределения статистик типа (4) при квадратичных потерях. Если мы положим  $\hat{d}_{t+\tau} = \hat{u}_{1,t+\tau}^2 - \hat{u}_{2,t+\tau}^2$  и определим  $\text{MSE}_i = (P - \tau + 1)^{-1} \sum_{t=R}^{T-\tau} \hat{u}_{i,t+\tau}^2$  ( $i = 1, 2$ ),  $\bar{d} = (P - \tau + 1)^{-1} \sum_{t=R}^{T-\tau} \hat{d}_{t+\tau} = \text{MSE}_1 - \text{MSE}_2$  и

$$\hat{\Gamma}_{dd}(j) = (P - \tau + 1)^{-1} \sum_{t=R+j}^{T-\tau} (\hat{d}_{t+\tau} - \bar{d})(\hat{d}_{t+\tau-j} - \bar{d}), \quad \hat{\Gamma}_{dd}(-j) = \hat{\Gamma}_{dd}(j),$$

то для стандартной ядерной оценки долгосрочной дисперсии,  $\hat{S}_{dd} = \sum_{j=-\bar{j}}^{\bar{j}} K(j/M) \hat{\Gamma}_{dd}(j)$ , статистики принимают вид

$$\text{MSE-t} = (P - \tau + 1)^{1/2} \times \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{S}_{dd}}}.$$

$$\text{MSE-F} = \begin{cases} (P - \tau + 1) \frac{\bar{d}}{\text{MSE}_2}, & 0 < \pi < \infty, \\ R^{1/2} (P - \tau + 1)^{1/2} \frac{\bar{d}}{\text{MSE}_2}, & \pi = 0. \end{cases}$$

Как и в случае, рассматриваемом в McCracken (2006), эти статистики обычно имеют асимптотические распределения, которые не являются нормальными, а представимы как функционалы  $k_2$ -мерного Броуновского движения  $W(\omega)$ .

Когда  $\lim(P/R) = \pi > 0$ , асимптотические распределения обеих статистик зависят от выборочной схемы (рекурсивная, скользящая, фиксированная), от относительных размеров внутривыборочной и вневыборочной порций наблюдений ( $\pi$  и  $\lambda = (1 + \pi)^{-1}$ ) и количества внешних предикторов в неограниченной модели ( $k_2$ , размерность  $W(\omega)$ ). Они также зависят от взвешивающей матрицы  $S_{\tilde{h}\tilde{h}}$ , о которой мы поговорим позже.

Когда  $\lim(P/R) = \pi = 0$ , асимптотические распределения сильно упрощаются. На самом деле, статистика MSE-t асимптотически стандартно нормальна независимо от выборочной схемы, параметра деления выборки  $\pi$  и количества внешних предикторов. Это также справедливо независимо от того, гетероскедастичны ли ошибки прогнозов и скоррелированы ли серийно. Асимптотическое распределение статистики MSE-F также упрощается, хотя и не так радикально. Оно более не зависит от выборочной схемы, но все еще зависит от количества внешних предикторов ( $k_2$ ) посредством зависимости от размерности двух стандартно нормальных векторов  $V_0$  и  $V_1$  и взвешивающей матрицы  $S_{\tilde{h}\tilde{h}}$ .

Таблица 2: Асимптотические 95%-ные критические значения для статистик MSE-t и MSE-F

$\pi \rightarrow$	0,0	0,2	1,0	2,0	0,0	0,2	1,0	2,0
$k \downarrow$	MSE-t				MSE-F			
Рекурсивная схема								
1	1,645	1,111	0,771	0,610	3,270	1,038	1,548	1,518
2	1,645	1,140	0,704	0,478	4,826	1,453	1,802	1,706
3	1,645	1,120	0,610	0,386	5,946	1,710	1,909	1,612
4	1,645	1,101	0,502	0,221	6,712	1,964	1,809	1,029
5	1,645	1,061	0,386	0,081	7,404	2,082	1,449	0,459
10	1,645	0,890	0,043	-0,339	10,414	2,489	0,205	-2,378
Скольльзящая схема								
1	1,645	1,117	0,651	0,334	3,270	1,112	1,583	1,215
2	1,645	1,105	0,484	0,103	4,826	1,481	1,695	0,504
3	1,645	1,088	0,381	-0,084	5,946	1,752	1,532	-0,471
4	1,645	1,087	0,274	-0,222	6,712	2,078	1,228	-1,487
5	1,645	1,034	0,155	-0,385	7,404	2,191	0,764	-2,765
10	1,645	0,872	-0,258	-1,011	10,414	2,520	-1,733	-9,863
Фиксированная схема								
1	1,645	1,416	1,252	1,218	3,270	1,015	1,667	1,862
2	1,645	1,342	1,072	0,955	4,826	1,421	2,116	2,195
3	1,645	1,277	0,909	0,733	5,946	1,653	2,319	2,275
4	1,645	1,281	0,755	0,509	6,712	1,947	2,238	1,784
5	1,645	1,193	0,646	0,291	7,404	2,018	2,167	1,249
10	1,645	1,007	0,167	-0,358	10,414	2,611	0,936	-2,404

Реализация инференции для этих тестов на равную точность прогнозов может быть сложным, по крайней мере оно сложнее, чем в невложенном случае. Конечно, проще всего использовать статистику MSE-t и предполагать, что  $P/R$  достаточно близко к нулю, так что асимптотика стандартно нормальная. Хотя следование такому подходу упрощает нахождение критических значений (их можно считать прямо из соответствующих таблиц), показано, что размер теста при такой аппроксимации очень плох, а его мощность очень мала при размерах выборки, обычно имеющихся у макроэкономистов. Главная трудность кроется в матрице шумовых параметров  $S_{\tilde{h}\tilde{h}}$ . Ниже мы очертим ряд методов проведения инференции, основанных на том, является ли эта матрица единичной или нет.

### Случай 1: $S_{\tilde{h}\tilde{h}}$ – единичная матрица

Когда прогнозы одношаговые, а ошибки прогнозов условно гомоскедастичны и серийно нескоррелированы,  $S_{\tilde{h}\tilde{h}}$  является единичной матрицей. Такую ситуацию полезно рассмотреть, так как распределения упрощаются еще сильнее. В частности, они теперь зависят только от известных величин, таких как  $P/R$ ,  $k_2$  и от выборочной схемы. Для этого случая McCracken (2006), используя симуляции, строит асимптотически верные оценки соответствующих критических значений, которые можно использовать для реализации инференции. Некоторые критические значения приведены в таблице 2.

### Случай 2: $S_{\tilde{h}\tilde{h}}$ не является единичной матрицей

Когда прогнозы не являются одношаговыми, или ошибки прогнозов условно гетероскедастичны или серийно скоррелированы,  $S_{\tilde{h}\tilde{h}}$  не является единичной матрицей. В таком случае предельные распределения зависят от шумовых параметров, и невозможно так затабулиро-

вать критические значения, чтобы ими можно было бы пользоваться в разных приложениях. Это не значит, что критические значения невозможно получить, просто это требует больше усилий. Ниже приведены два способа это сделать.

### Прямые симуляции

Заметим, что каждое из распределений зависит от интегралов квадратичных форм от Броуновского движения. Используя методы Монте-Карло, каждый из них можно состоятельно оценить: интегралы можно приблизить средними, а Броуновское движение – случайными блужданиями. Если матрицу  $S_{\tilde{h}\tilde{h}}$  можно состоятельно оценить, то квадратичные формы тоже можно. Соответственно, нужные критические значения можно построить, используя состоятельную оценку  $S_{\tilde{h}\tilde{h}}$  и численные методы следующим образом:

1. Подогнать ограниченную (чтобы наложить нулевую гипотезу) прогнозирующую модель ко всей имеющейся выборке и сохранить остатки  $\hat{u}_{t+\tau}$ ; оценить  $\hat{S}_{hh} = \text{LRV}(X_{t,2}\hat{u}_{t+\tau})$  по методу Newey & West (1987) с шириной окна  $1.5 \cdot \tau$  при  $\tau > 1$  и 0 при  $\tau = 1$ .

2. Используя оценки  $\hat{B}_i = (\sum_{t=1}^{R+P} x_{i,t}x'_{i,t})^{-1}$  и  $\hat{S}_{12} = (\sum_{t=1}^{R+P} x_{22,t}x'_{1,t})$ , где  $\hat{\sigma}^2$  обозначает остаточную дисперсию модели, оцененной на шаге 1, подсчитать  $\hat{D} = \hat{B}_{22}^{-1} - \hat{S}_{12}\hat{B}_1\hat{S}'_{12}$  и сформировать

$$\hat{S}_{\tilde{h}\tilde{h}} = \hat{\sigma}^{-2} \begin{pmatrix} 0_{k_2 \times k_1} & \hat{D}^{.5} \end{pmatrix} \hat{B}_2 \hat{S}_{hh} \hat{B}_2 \begin{pmatrix} 0_{k_1 \times k_2} \\ \hat{D}^{.5} \end{pmatrix},$$

где  $\hat{D}^{.5}$  есть разложение Холецкого для  $\hat{D}$ .

3. Подсчитать характеристические числа матрицы  $\hat{S}_{\tilde{h}\tilde{h}}$ .

4. Вытянуть 5000 независимых «наблюдений» из асимптотического распределения каждой тестовой статистики при данных  $k_2$  и  $\hat{\pi} = P/R$ . Генерируя эти «наблюдения», необходимые  $k_2$  Броуновских движений симулируются как случайные блуждания, каждое из которых использует независимую последовательность из 10000 приращений, распределенных как  $N(0, 10000^{-.5})$ . Интегралы заменяются суммами взвешенными квадратичными формами от случайных блужданий, используя характеристические числа матрицы  $\hat{S}_{\tilde{h}\tilde{h}}$  в качестве весов. 10%-ное критическое значение рассчитывается как 90%-ный квантиль результирующих статистик.

### Бутстрап

Альтернативным методом построения критических значений является бутстрап. При линейности структур всех участвующих моделей, Clark & McCracken (2005) рассматривают параметрический бутстрап, использованный в Kilian (1999), следующим образом:

1. Оценить векторную авторегрессию для  $y_t$  и  $x_{2,t}$  с помощью МНК, используя всю выборку и налагая нулевое ограничение, что в  $x_{22,t}$  нет прогнозирующей силы для  $y_t$ , и сохранить остатки. Заметим, что генерирующее уравнение для  $y_t$  принимает точно такую же форму, что и ограниченная прогнозирующая модель при  $\tau = 1$  (но оцененная для всех имеющихся данных). Порядки авторегрессии для  $y_t$  и  $x_{2,t}$  определяются с помощью АИС, допуская разные длины лагов (скажем, от 0 до 8) при каждой из переменных.

2. Бутстрапированные временные ряды для  $y_t$  и  $x_{2,t}$  генерируются вытягиванием с возвращением из набора сохраненных остатков, используя авторегрессионные структуры моделей для итеративного построения данных. Начальные наблюдения, т.е. наблюдения, предшествующие выборке данных, участвовавших в оценивании моделей, генерируются вытягиванием из первоначальных данных. В частности, начальные наблюдения выбираются взятием случайной даты, а затем взятием начальных наблюдений, начиная с этой даты, но в обратном порядке.

3. В каждом из 999 бутстраповских повторов используются бутстрапированные данные для оценивания ограниченной и неограниченной прогнозирующих моделей. Из результирующих прогнозов затем строятся тестовые статистики. Критические значения рассчитываются просто как квантили бутстрапированных тестовых статистик.

## 5 Заключение

В этом эссе мы обсудили тестирование на равную точность прогнозов между двумя либо невложенными, либо вложенными моделями. Мы сконцентрировались на подробностях такого тестирования, когда прогнозы строятся на основе оцененных параметров модели. И в невложенном, и во вложенном случаях имеются детали, усложняющие построение асимптотически верного теста. В свете этих сложностей мы внесли предложения по построению тестов, имеющих правильный размер в больших выборках.

## Список литературы

- Chong, Y.Y. & D.F. Hendry (1986). Econometric evaluation of linear macro-economic models. *Review of Economic Studies* 53, 671–690.
- Clark, T. E. & M.W. McCracken (2001). Tests of equal forecast accuracy and encompassing for nested models. *Journal of Econometrics* 105, 85–110.
- Clark, T. E. & M.W. McCracken (2005). Evaluating direct multi-step forecasts. *Econometric Reviews* 24, 369–404.
- Diebold, F.X. & R.S. Mariano (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics* 13, 253–263.
- Kilian, L. (1999). Exchange rates and monetary fundamentals: What do we learn from long-horizon regressions? *Journal of Applied Econometrics* 14, 491–510.
- McCracken, M.W. (2000). Robust out-of-sample inference. *Journal of Econometrics* 99, 195–223.
- McCracken, M.W. (2006). Asymptotics for out-of-sample tests of Granger causality. *Journal of Econometrics*, в печати.
- Newey, W.K. & K.D. West (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica* 55, 703–08.
- West, K.D. (1996). Asymptotic inference about predictive ability. *Econometrica* 64, 1067–1084.
- West, K.D. & M.W. McCracken (1998). Regression-based tests of predictive ability. *International Economic Review* 39, 817–40.

# Pairwise tests of equal forecast accuracy

Michael McCracken

*Federal Reserve Board of Governors, Washington D.C., USA*

This essay reviews recent work regarding pairwise tests of equal forecast accuracy between nested and non-nested models. While some technical details are given, special emphasis is placed on the practical implementation of the tests.

# Впечатления от конференции

## Ежегодная встреча британской эконометрической группы<sup>\*</sup>

Виктория Зинде-Уолш<sup>†</sup>

*Университет МакГилл, Монреаль, Канада*

В настоящем отчете содержатся впечатления участника встречи британской эконометрической группы, проводившейся 13–15 июля 2006 г. в Бристоле.

Британцы первыми создали исследовательскую группу по эконометрике, затем появились несколько региональных американских и европейских групп. Ежегодные британские конференции проводятся в Бристоле, в живописном месте рядом с историческим Клифтонским висячим мостом. Нужно сказать, что поселяют участников в общежитии с довольно примитивными удобствами, зато кругом – красота. Программу и статьи июльской конференции можно найти на сайте [http://www.esg.ac.uk/forms/esg\\_programme\\_2006.pdf](http://www.esg.ac.uk/forms/esg_programme_2006.pdf). В этом году было трое приглашенных докладчиков и, кроме того, были представлены двадцать статей.

По мнению многих участников конференции наибольший интерес вызвал приглашенный доклад П. Перрона (Бостонский университет) «Аналитический анализ оценки лог-периодограмм при уровневых сдвигах и его последствия для волатильности доходностей акций»<sup>1</sup>. Общеизвестны работы Перрона в области структурных сдвигов и их влияния на оценки и тесты в моделях интегрированных временных рядов. Теперь он исследует структурные сдвиги в сравнении с моделями «долговременной памяти» для описания волатильности доходностей акций. Использование «долговременной памяти» в применении к этим временным рядам обосновывается тем, что автокорреляционная функция остается на уровне 0,1 даже после 2500 лагов. Перрон изучил модель структурных сдвигов (со случайными моментом и величиной сдвига) и разработал центральную предельную теорию для порожденных такой моделью случайных процессов. Предельная автокорреляционная функция в этой модели поразительно проста – это многочлен третьего порядка от одного переменного параметра,  $k$ , который представляет из себя лаг по отношению к размеру выборки. В приложении к временному ряду доходностей автокорреляционная функция для начальных 2500 лагов близка к оценке, полученной на основе наблюдений, и выглядит совместимой с «долговременной памятью». За пределом 2500 лагов теоретическая и наблюдаемая автокорреляции все еще близки, но существенно отличаются от геометрического спада, предсказуемого моделью «долговременной памяти», и автокорреляционная функция уходит в область отрицательных значений. Формальное тестирование, основанное на полной структуре лагов, отрицает гипотезу «долговременной памяти». Новая модель структурных сдвигов дает результаты лучшие, чем GARCH(1,1), применительно к временным рядам для доходностей акций. В своем комментарии Р. Тейлор (Ноттингемский университет)<sup>2</sup> объявил исследование фундаментальным новшеством и отметил, что эта работа демонстрирует силу асимптотической теории и ее

<sup>\*</sup>Цитировать как: Зинде-Уолш, Виктория (2006) «Ежегодная встреча британской эконометрической группы», Квантиль, №1, стр. 63–65. Citation: Zinde-Walsh, Victoria (2006) “UK Econometric Study Group annual meeting,” *Quantile*, No.1, pp. 63–65.

<sup>†</sup>Адрес: Leacock Building, Room 519, 855 Sherbrooke Street West, Montreal, Quebec, H3A 2T7. Электронная почта: [victoria.zinde-walsh@mcgill.ca](mailto:victoria.zinde-walsh@mcgill.ca)

<sup>1</sup>Pierre Perron (Boston University) “An analytical evaluation of the log-periodogram estimate in the presence of level shifts and its implication for stock returns volatility”

<sup>2</sup>Robert Taylor (Nottingham University)

способность приводить к открытию новых важных результатов. По вопросам и оживленной дискуссии было очевидно, что этот доклад вызвал глубокий интерес у участников конференции.

Приглашенный доклад М. Дж. Ли (Корейский университет) «Структурное оценивание инструментальными переменными динамических эффектов условий эксперимента: поведенческие последствия шлепанья»<sup>3</sup> носил более прикладной характер. Теоретическая часть была посвящена преодолению трудностей, связанных с динамическим характером структурной модели, который приводит к необходимости нелинейных методов оценивания. Метод был применен к данным опроса матерей о шлепанье детей раннего (2–3 года) и более позднего (4–5 лет) возраста с целью исследования влияния такого наказания на поведение детей (измеряемого индексом нарушения поведения). Основанный на исследовании вывод, что шлепанье улучшает поведение, и раннее шлепанье особенно эффективно, противоречит данным литературы по психологии, где считается, что шлепанье вредно влияет на поведение. Комментировал этот доклад Ф. Уиндмейер (Бристольский университет)<sup>4</sup>. Он отметил, что методология и данные, на которых основывались заключения, вызывают серьезные вопросы. Существенный пробел заключается в том, что только матери были опрошены, и не поступило никаких сведений об отцовском шлепанье.

Третий приглашенный докладчик, Ф. Клейберген (Университет Брауна), представил работу «Статистики, основанные на подмножествах в линейной регрессии с инструментальными переменными»<sup>5</sup>. Доклад был прокомментирован Р. Дэвидсоном. Этот доклад и два последующих «Точное критическое значение и функция мощности для условных функций правдоподобия и связанных с ней тестов в регрессионной модели с инструментальными переменными и известной ковариантностью», представленный Г. Хилльером (университет Саутхемптон)<sup>6</sup>, и «Бутстраповская инференция в линейном уравнении, оцененном через инструментальные переменные», представленном Р. Дэвидсоном (ГРЕКАМ и университет МакГилл)<sup>7</sup> связаны тематически. Они посвящены обсуждению теории статистической инференции в моделях инструментальных переменных с, возможно, слабыми инструментами. В своей статье Клейберген исследовал модифицированную статистику Андерсона–Рубина для тестирования параметра при переменной, на которой сконцентрирован интерес, в модели, где мощность тестирования зависит от того, насколько хорошо подобраны инструменты для остальных переменных. Если инструменты очень слабы, предельное распределение статистики, полученное автором, нестандартное и приводит к консервативному тесту. Хилльер рассмотрел инвариантные черты упрощенных моделей инструментальных переменных и достаточные статистики. В пределе свойства тестов зависят от количества информации в выборке (иначе говоря, от слабости инструмента). Статистики условного отношения правдоподобия доминируют по мощности тестирования. Дэвидсон показал, что все общеупотребительные статистики для тестирования гипотез могут быть выражены через шесть квадратичных форм от данных выборки, которые представляют собой достаточные статистики. Предельное распределение каждой из них является центральным или нецентральным хи-квадрат. В результате этого становится ненужным порождать эндогенные переменные для бутстрапа. Вместо этого стала возможной имитация выборки на основе предельных распределений достаточных статистик. Это существенно упрощает применение бутстрапа при тестировании гипотез. Идентификация в этих ситуациях, по словам Р. Дэвидсона, зависит от нашего принятия «асимптотической догадки» о сильных или слабых инструментах.

<sup>3</sup>Myoung Jae Lee (Korea University) “Structural IVE for dynamic treatment effects: spanking effect on behavior”

<sup>4</sup>Frank Windmeijer (University of Bristol)

<sup>5</sup>Frank Kleibergen (Brown University) “Subset statistics in the linear IV regression model”

<sup>6</sup>Grant Hillier (University of Southampton) “Exact critical value and power functions for the conditional likelihood ratio and related tests in the IV regression model with known covariance”

<sup>7</sup>Russell Davidson (GREQAM and McGill University, with James MacKinnon) “Bootstrap inference in a linear equation estimated by instrumental variables”

Интерес вызвали и другие доклады. Нужно сказать, что общий уровень этой конференции очень высок, и интересных выступлений и обсуждений обычно бывает много. В области временных рядов можно отметить доклад К. Касерес<sup>8</sup> о тестировании гетероскедастичности в интегрированных рядах (с обычным распределением хи-квадрат) или во взрывном процессе (с нестандартным распределением), а также статью С. Поллока<sup>9</sup> по фильтрам с отбором частот (Поллок – наследственный лорд и по новому закону уже не имеет права заседать в Палате Лордов, теперь у него остается больше времени на занятия спектральным анализом). Очень занятный доклад Ч. Гранта (университет Рединга) «Неформальные кредитные рынки, стоимость судопроизводства и потребительский кредит: сведения из данных на уровне фирм»<sup>10</sup> был посвящен неформальным кредитным рынкам в Италии, где на юге принято брать в долг у семьи и друзей (на севере преобладает банковский кредит), в результате чего на юге чаще происходят невыплаты долга – люди не боятся, что в будущем кредитные организации не дадут им кредит, поскольку последние не могут знать о невыплатах семье и друзьям. Несколько интересных работ было представлено по моделям панельных данных. Можно отметить доклад Х. Даен (университет Лювен)<sup>11</sup> о методах уменьшения смещения в линейных динамических моделях с фиксированными эффектами. В докладе П. Галиардини (университет Лугано)<sup>12</sup> рассматривалась регуляризация Тихонова для решения некорректных задач, которые возникают в непараметрических моделях с инструментальными переменными. Он предложил «штраф», который включает и функцию (что дает штраф, используемый Дж. Хоровитцем), и ее производную, и таким образом принимает во внимание осцилляцию. М. Шафганс (Лондонская школа экономики)<sup>13</sup> представила доклад об оценивании усредненных производных в условиях, когда плотность распределения не имеет достаточной гладкости. Она предложила новый метод, дающий оптимальное квадратичное отклонение даже при отсутствии достаточной гладкости, а также в случаях, когда степень гладкости плотности неизвестна.

## UK Econometric Study Group annual meeting

Victoria Zinde-Walsh

*McGill University, Montreal, Canada*

This report contains impressions of a participant of the UK Econometric Study Group meeting held on July 13–15, 2006 in Bristol, UK.

<sup>8</sup>Carlos Caceres (Nuffield College, with Bent Nielsen) “Asymptotic properties of White’s test for heteroskedasticity”

<sup>9</sup>Stephen Pollock (Queen Mary, University of London) “The realisation of finite-sample frequency-selective filters”

<sup>10</sup>Charles Grant (University of Reading, with Mario Padula) “Informal credit markets, judicial costs and consumer credit: evidence from firm level data”

<sup>11</sup>Geert Dhaene (Katholieke Universiteit Leuven, with Koen Jochmans and Bram Thuysbaert) “Jackknife bias reduction for nonlinear dynamic panel data models with fixed effects”

<sup>12</sup>Patrick Gagliardini (University of Lugano, with Olivier Scaillet) “Tikhonov regularisation for functional minimum distance estimators”

<sup>13</sup>Marcia Schafgans (London School of Economics, with Victoria Zinde-Walsh) “Robust average derivative estimation”



# Статьи

## Денежный спрос в Латвии\*

Борис Силиверстов†

*Немецкий институт экономических исследований, Берлин, Германия*

В данной работе применяется прикладная модель исправления ошибок к денежному спросу в Латвии. В модели основное место занимает единственный коинтеграционный вектор, содержащий информацию о долгосрочном равновесном отношении между денежной массой, валовым внутренним продуктом и долгосрочной процентной ставкой. Модель проявляет стабильность коэффициентов и способность точно прогнозировать денежную массу за последние три года.

*Ключевые слова: спрос на деньги, новые члены Евросоюза, Латвия*

*Классификация JEL: C32, E41.*

### 1 Введение

Денежный спрос является одной из самых исследуемых тем в современной макроэкономике, о чем свидетельствует значительное количество как теоретических, так и прикладных научных работ, написанных за последние несколько десятков лет. Это может быть проиллюстрировано на примере обзорных статей Fase (1993), Sriram (2001) и Knell & Stix (2003), где обобщены результаты моделирования денежного спроса, соответственно, в 100 статьях, написанных в период от 1972 по 1992 гг.; в 28 статьях, опубликованных между 1990 и 1999 гг.; и в 68 статьях, написанных между 1990 и 1999 гг. Несмотря на то, что традиционно большая часть исследований была посвящена индустриально развитым странам западного мира, существует также и сравнительно небольшое количество исследований, изучающих спрос на деньги в странах Восточной Европы: Bolharyn & Babaian (1998) – для Украины, Karla (1999) – для Албании, Buch (2001) – для Венгрии и Польши, Payne (2003) – для Хорватии, Slavova (2003) – для Болгарии, Andronescu, Mohammadi & Payne (2004) – для Румынии, Bahmani-Oskooee & Barry (2000) и Oomes & Ohnsorge (2005) – для России.

В настоящей статье мы предлагаем прикладную модель денежного спроса в Латвии, используя данные с 1996 по 2005 год. Наша модель содержит небольшое количество переменных, и в то же время ее оценочные параметры проявляют стабильность во времени. Насколько нам известно, в соответствующей литературе существуют лишь два исследования, которые моделируют долговременный денежный спрос в Латвии – Tillers (2004) и Dreger, Reimers & Roffia (2006). Tillers (2004) оценивает модель денежного спроса, используя данные с 1996 по 2003 год. Главный результат этого исследования заключается в том, что оценка эластичности денежного спроса по отношению к валовому продукту существенно превышает единицу, тогда как оценка эластичности денежного спроса по отношению к процентной ставке статистически неотличима от нуля. Последний результат предполагает, что денежный спрос практически не зависит от изменений процентной ставки, и этот факт ставит под сомнения правильность спецификации модели, предложенной в Tillers (2004).

В свою очередь, главным вкладом статьи Dreger, Reimers & Roffia (2006) является использование методов панельной коинтеграции для оценки долгосрочного спроса на деньги для 10

\*Цитировать как: Силиверстов, Борис (2006) «Денежный спрос в Латвии», Квантиль, №1, стр. 67–79.  
Citation: Siliverstovs, Boriss (2006) “Modelling Demand for Money in Latvia,” Quantile, No.1, pp. 67–79.

†Адрес: DIW Berlin, Königin-Luise Straße 5, 14195 Berlin, Germany. Электронная почта: [bsiliverstovs@diw.de](mailto:bsiliverstovs@diw.de)

новых членов Европейского Союза, включая Латвию. Такой подход основывается на предположении, что для каждой страны модели долгосрочного спроса на деньги имеют одинаковые параметры. Принимая во внимание тот факт, что эти страны имеют различные как культурные, так и экономические особенности, правильность такого подхода можно поставить под сомнение. В дополнение, использование методов панельной коинтеграции предполагает, что спрос на деньги в каждой стране статистически не зависит от спроса на деньги в других странах. Сами авторы признают, что последнее предположение, скорее всего, не соответствует действительности, и, следовательно, результаты, полученные в Dreger, Reimers & Roffia (2006), могут быть поставлены под сомнение, например, из-за несмоделированной коинтеграции между переменными различных стран (Banerjee, Marcellino & Osbat, 2001). И, наконец, стабильность параметров моделей в Dreger, Reimers & Roffia (2006) вообще не рассматривается. Таким образом, необходимы дополнительные исследования долгосрочного спроса на деньги в каждой отдельной стране для проверки достоверности результатов, полученных в Dreger, Reimers & Roffia (2006).

Наше последующее изложение построено следующим образом. В следующем разделе описывается экономическая ситуация в Латвии. Раздел 3 содержит краткий обзор теоретических аспектов моделирования спроса на деньги. Раздел 4 содержит описание данных и их источников. В разделе 5 описываются метод моделирования и полученные результаты. Выводы делаются в последнем разделе.

## 2 Экономическая ситуация в Латвии

В последние 15 лет после обретения независимости в Латвии осуществился значительный экономический прогресс. Но необходимо отметить, что путь экономического развития не был и до сего времени не является простым. Начало 90-тых годов характеризовалось резким падением уровня производства вследствие нарушения хозяйственных связей, посредством которых латвийские предприятия были связаны с предприятиями на территории остальных республик бывшего Советского Союза. Сложная экономическая ситуация породила необходимость проведения ряда реформ, направленных на стабилизацию экономического положения и реструктуризацию экономики на рыночные отношения. Целью этих реформ были либерализация цен, отмена государственных субсидий предприятиям, приватизация, жесткий бюджетный контроль, устранение торговых барьеров, введение стабильной национальной валюты, учреждение национального центрального банка и т.д.

С момента учреждения Центральный Банк Латвии проводит независимую денежную политику, направленную на сокращение темпов инфляции и на поддержание стабильного обменного курса лата. Жесткая кредитно-денежная политика привела к постоянному снижению темпов годовой инфляции с 958,7% в 1992 году до 23,1% в 1995 и до 1,8% в 2000 году. Центральный Банк Латвии также преуспел в поддержании стабильного обменного курса национальной валюты. В 1994 году курс лата был прикреплен к специальным правам заимствования по курсу  $1 \text{ SDR} = 0,7997 \text{ LVL}$ . С тех пор валютная политика Банка Латвии приобрела форму валютного управления, где находящаяся в обращении денежная масса соответствует запасам золота и иностранной валюты, находящимся в распоряжении центрального банка. В 2005 году был установлен фиксированный курс лата по отношению к евро:  $1 \text{ EUR} = 0,702804 \text{ LVL}$ . Также необходимо отметить, что Центральный Банк Латвии сумел обеспечить стабильный курс лата в период как внутреннего банковского кризиса в 1995 году, так и в период российского финансового кризиса в 1998, которые оказали сильное негативное влияние на экономическую ситуацию в Латвии.

С 2000 года экономика Латвии развивается сравнительно быстрыми темпами (среднегодовой прирост ВВП составил примерно 7,6%). Прирост ВВП вызван в первую очередь сильным внутренним спросом, который преимущественно способствует дальнейшему росту сфе-

ры услуг, особенно торговой и строительной, а также ростом экспорта товаров благодаря значительным инвестициям. Так, с 2001 по 2004 годы доля инвестиций в ВВП составляла в среднем примерно 24,5%, а объем инвестиций за этот период вырос примерно на 40%. Без сомнения, такой быстрый прирост инвестиций был бы невозможен без учета прямых иностранных вложений, которые были привлечены в Латвию. С начала девяностых полный объем прямых иностранных вложений удваивался каждые 3–4 года, и к концу 2004 он составил примерно 2,3 миллиарда латов, что составляет около 30% годового ВВП.

Однако рекордные темпы прироста ВВП сопровождаются резким повышением темпов инфляции, которые в последние три года в среднем составляли около 6% в год. С одной стороны, увеличение темпов инфляции обуславливается такими внешними причинами, как повышение цен на энергоносители. С другой стороны, это обуславливается такими внутренними причинами, как быстрые темпы роста зарплат, которые часто превышали темпы роста производительности, а также обширным ростом объемов выдаваемых банками кредитов, обусловленным сравнительно низкими процентными ставками. Таким образом, высокие темпы инфляции не могут не вызывать тревогу у латвийских политиков и экономистов из-за опасности, что латвийские товары теряют свою конкурентоспособность на внешнем рынке. Существует дополнительная опасность, что сопутствующий увеличивающийся спрос на импортируемые товары может значительно увеличить дефицит торгового баланса страны, который может достичь угрожающих размеров.

Обобщая вышесказанное, можно сказать, что с момента восстановления независимости Латвия достигла значительного прогресса в реформировании экономики на рыночно-ориентированную. Несмотря на экономические кризисы, вызванные как внутренними, так и внешними причинами, латвийская экономика продолжает развиваться быстрыми темпами. На данный момент перед латвийскими политиками и экономистами стоит трудная задача по снижению сравнительно высоких темпов инфляции без негативных последствий для экономического развития страны. Учитывая описанную экономическую ситуацию в стране, наша задача состоит в определении факторов, которые влияют на денежный спрос в Латвии. Оценка статистической модели позволит произвести сравнительный анализ эластичности спроса на деньги по отношению к национальному валовому продукту и по отношению к процентной ставке в Латвии с результатами, полученными как для стран Восточной Европы с переходной экономикой, так и для западных индустриально развитых стран.

### 3 Теоретические аспекты

Модель долгосрочного спроса на деньги имеет следующий вид:

$$\frac{M}{P} = f(Y, I),$$

где денежный спрос в реальном выражении  $M/P$  измеряется как соотношение денежной массы  $M$  в номинальном выражении к уровню цен  $P$ . Такая спецификация модели предполагает, что в долгосрочной перспективе деньги нейтральны, т.е. они не имеют реального эффекта на валовый продукт страны, и что все колебания денежной массы в конечном итоге находят точное отражение в изменениях уровня цен. Как видно из уравнения, спрос на деньги моделируется как функция двух переменных: действительного валового внутреннего продукта  $Y$ , который показывает уровень экономической активности в стране, и долгосрочной процентной ставки  $I$ , которая показывает альтернативные издержки владения деньгами. Экономическая теория выделяет две главные причины держания денег: для выполнения разных операций, величина общего объема которых определяется ВВП, и для диверсификации портфеля ценных бумаг, где долгосрочная процентная ставка показывает доходность других видов ценных бумаг, которые не подпадают под определение денежной массы.

Таблица 1: Данные и их источники

Переменная	Сокращение	Код в базе	База данных
Денежная масса (M2) – млн. лат	M2	OA9410010.Q	GMM
Индекс потребительских цен 2000 = 100	CPI	94164...ZF...	IFS
Процентная ставка (долгосрочная)	I	IA9410133.Q	GMM
Номинальный ВВП – млрд. лат	Y	OA9410002.Q	GMM
Дефлятор ВВП 2000 = 100	PGDP	OA9410111.Q	GMM

После логарифмического преобразования долгосрочный спрос на деньги может быть представлен в следующем виде

$$\ln\left(\frac{M}{P}\right) = \alpha_Y \ln(Y) + \alpha_I \ln(I) + \varepsilon, \quad (1)$$

где коэффициенты  $\alpha_Y$  и  $\alpha_I$  определяют долгосрочные эластичности денежного спроса по отношению к валовому продукту и по отношению к процентной ставке. Первый коэффициент является положительным, т.к. спрос на деньги увеличивается с ростом экономики. Второй коэффициент является отрицательным, т.к. увеличение долгосрочной процентной ставки приводит к возрастанию альтернативных издержек владения деньгами и, как следствие, к уменьшению спроса на деньги. Третье слагаемое  $\varepsilon$  обозначает элемент коррекции ошибок и измеряет величину отклонения от долговременного равновесия между моделируемыми переменными, определенным в уравнении (1).

Согласно обзорной статье Sriram (2001), модель долгосрочного спроса на деньги, используемая в данной статье, соответствует общей структуре других исследований денежного спроса, хотя она может отличаться от них в выборе как зависимой, так и независимых переменных.

## 4 Данные

Квартальные данные, охватывающие период с 1996:1 по 2005:4, были загружены из баз данных Global Market Monitor (GMM) и International Financial Statistics (IFS), см. таблицу 1. Для последующего анализа были произведены следующие преобразования:  $m - p = \ln(M2/CPI)$  – денежная масса в реальном выражении,  $y = \ln(GDP/PGDP)$  – реальный валовый продукт,  $i = \ln(I)$  – долгосрочная процентная ставка. В нашей модели мы решили использовать логарифмическое преобразование процентной ставки по следующим причинам. Во-первых, принимая во внимание тот факт, что вариация и уровень процентной ставки были значительно выше в начале рассматриваемого периода, чем в конце, подобная трансформация немного сглаживает временный ряд. Во-вторых, логарифмическая трансформация позволяет интерпретировать параметр при процентной ставке как эластичность денежного спроса по отношению к процентной ставке. Преобразованные данные представлены на Рис. 1.

## 5 Эконометрическая модель

### Тестирование на коинтеграцию

В этом подразделе мы применяем подход к моделированию, пропагандируемый в Hendry & Mizon (1993) и Hendry & Juselius (2000, 2001), среди прочих. В частности, в качестве отправного пункта мы используем векторную авторегрессионную модель VAR( $n$ ), на которую

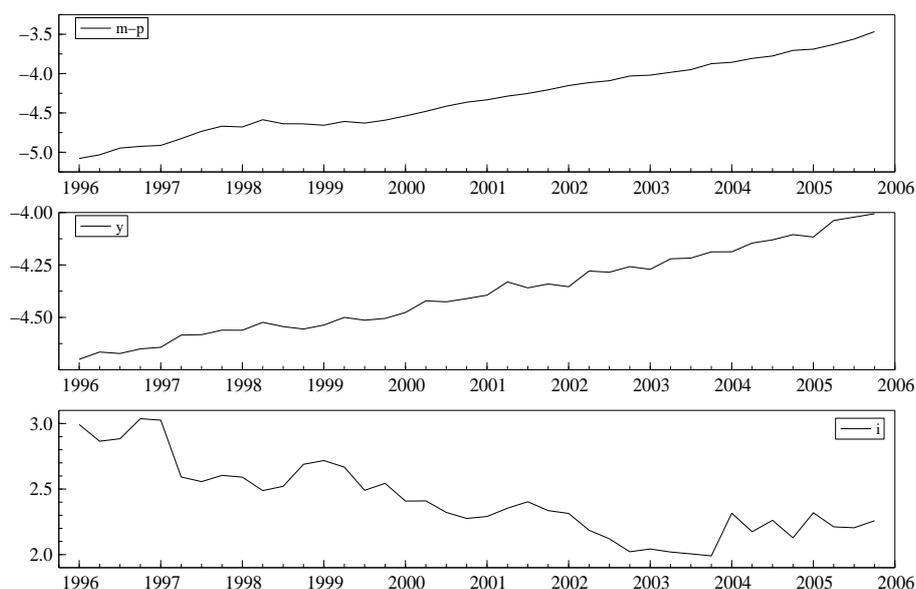


Рис. 1: Данные за 1996–2005 гг.

Таблица 2: Модель VAR: диагностические тесты

	Тесты для одного уравнения			Векторные тесты	
	$(m-p)_t$	$y_t$	$i_t$		
$F_{AR}(1-3)(3,32)$	[0,272]	[0,046]*	[0,687]	$F_{AR}(1-3)(27,70)$	[0,072]
$\chi^2_{Norm}(2)$	[0,535]	[0,916]	[0,214]	$\chi^2_{Norm}(6)$	[0,443]
$F_{Hetero}(6,28)$	[0,047]*	[0,570]	[0,371]	$F_{Hetero}(36,103)$	[0,627]
$F_{Hetero-X}(9,25)$	[0,123]	[0,727]	[0,229]	$F_{Hetero-X}(54,106)$	[0,714]
$F_{ARCH}(1)(3,29)$	[0,799]	[0,181]	[0,535]		

Замечания: В скобках приведены соответствующие Р-значения статистик.

еще не наложены никакие ограничения. Эта модель, представленная как модель исправления ошибок, выглядит следующим образом:

$$\Delta x_t = \Pi x_{t-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \Gamma_i \Delta x_{t-i} + \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N_k(0, \Sigma), \quad (2)$$

где  $x_t = ((m-p)_t, y_t, i_t)'$  является  $k$ -мерным вектором переменных, описанных выше, а  $\mu$  обозначает константу.

Далее мы предпринимаем следующие шаги. После выбора авторегрессионного порядка  $n$  VAR-модели мы производим статистические тесты на присутствие коинтеграции среди рассматриваемых переменных и затем налагаем соответствующие ограничения на модель VAR( $n$ ). После этого мы с помощью статистических тестов пытаемся установить, являются ли рассматриваемые переменные слабо экзогенными по отношению к параметрам долгосрочной функции спроса на деньги. Мы используем результаты для построения модели денежного спроса, которая включает в себя как краткосрочную, так и долгосрочную информацию о связях между переменными, обнаруживает стабильность параметров, успешно преодолевает диагностические тесты и может точно прогнозировать зависимую переменную за последние несколько лет.

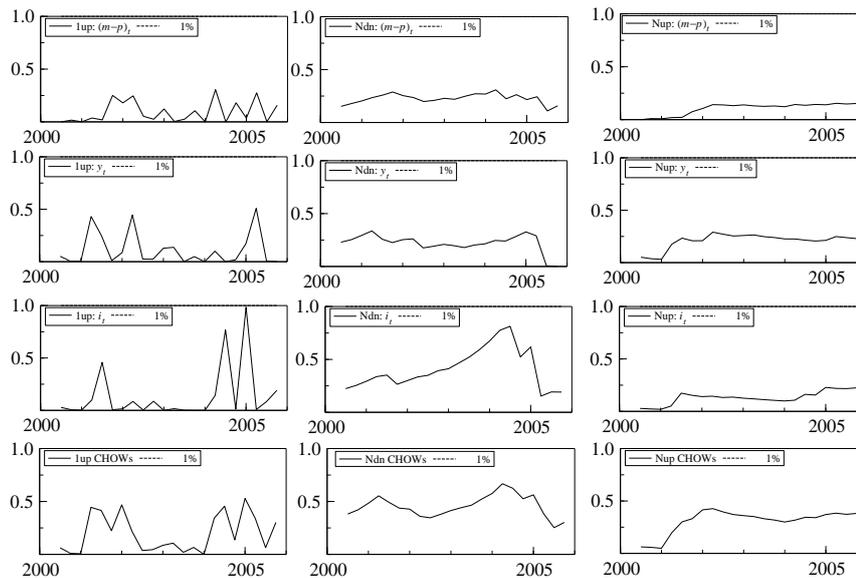


Рис. 2: Модель VAR: рекурсивный тест Чау

Из-за сравнительно малого количества наблюдений ( $T = 40$ ) необходимо выбрать как можно меньший авторегрессионный порядок модели  $n$ . Как видно из таблицы 2, где отображены результаты диагностических тестов, VAR(1) может достаточно хорошо описать данные, т.к. никаких существенных отклонений от допущений, положенных в основу модели, не обнаружено. В таблице 2 приведены следующие диагностические тесты, используемые как для одного уравнения, так и для системы уравнений:  $F_{AR}$  – тест об отсутствии автокорреляции в остатках регрессии (Godfrey, 1978);  $\chi^2_{Norm}$  – тест о нормальном распределении остатков регрессии (Doornik & Hansen, 1994);  $F_{Hetero}$  и  $F_{Hetero-X}$  – тесты об отсутствии гетероскедастичности в остатках регрессии (White, 1980);  $F_{ARCH}$  – тест об отсутствии ARCH эффектов в остатках регрессии (Engle, 1982). Исходная VAR(1) модель также демонстрирует стабильность параметров, как видно на Рис. 2, где отображена рекурсивно оцененная статистика Чау, пронормированная критическим значением, которое соответствует уровню значимости 1%.<sup>1</sup> Все диаграммы, оценка параметров модели, а также диагностические тесты были произведены с помощью GiveWin 2.2 и Pc-Give 10.2 (см. Doornik & Hendry, 2001a, 2001b).

Наш следующий шаг заключается в наложении ограничений на исходную модель VAR(1). Для этого мы используем коинтеграционный метод Йохансена, основанный на максимизации функции правдоподобия. В таблице 3 приведены результаты тестов на наличие коинтеграции в нашей модели, где использованы как асимптотические критические значения, так и критические значения с поправкой на малое количество наблюдений (Osterwald-Lenum, 1992). Результаты тестов указывают на наличие одного коинтеграционного соотношения между переменными в модели.

Дополнительную информацию о динамических свойствах модели (и о количестве общих стохастических трендов) возможно получить сравнивая модули собственных значений сопровождающей матрицы, рассчитанных для исходной модели и для модели, на которую наложены коинтеграционные ограничения. Величина самого большого модуля немного превышает единицу, но очень вероятно, что она статистически незначимо отличается от единицы. Далее, значения модулей второго и третьего по величине собственных значений довольно близки к единице и к нулю, что, соответственно, согласуется с результатами формального статисти-

<sup>1</sup>Фиктивная переменная  $D_t = D0401$  была добавлена к исходной модели, чтобы учесть скачок процентной ставки в первом квартале 2004 года в ответ на резкое увеличение темпов инфляции.

Таблица 3: Модель VAR: тесты на коинтеграцию

Асимптотические критические значения				
Ранг	След	Р-значение	$\lambda_{\max}$	Р-значение
$r = 0$	51,86	[0,000]**	39,3	[0,000]**
$r = 1$	12,56	[0,133]	11,6	[0,127]
$r = 2$	0,96	[0,328]	0,96	[0,328]
Исправленные критические значения				
Ранг	След	Р-значение	$\lambda_{\max}$	Р-значение
$r = 0$	47,97	[0,000]**	36,35	[0,000]**
$r = 1$	11,62	[0,178]	10,73	[0,171]
$r = 2$	0,89	[0,347]	0,89	[0,347]
Модули собственных значений				
Без ограничения		$r = 1$		
1,017		1,000		
0,701		1,000		
0,046		0,033		

Таблица 4: Модель VAR: тесты на стационарность

Стационарность					Тренд-стационарность					
$(m-p)_t$	$y_t$	$i_t$	$\chi^2(2)$	Р-значение	$(m-p)_t$	$y_t$	$i_t$	тренд	$\chi^2(2)$	Р-значение
.	0	0	34,732	[0,000]**	.	0	0	.	36,687	[0,000]**
0	.	0	34,242	[0,000]**	0	.	0	.	32,352	[0,000]**
0	0	.	26,661	[0,000]**	0	0	.	.	29,415	[0,000]**

Замечания: '0' обозначает наложенное ограничение, что соответствующий коэффициент равен нулю, '.' обозначает отсутствие какого-либо ограничения.

ческого анализа. Наконец, после наложения коинтеграционного ранга  $r = 1$  два наибольших собственных значения становятся равными единице, тогда как наименьшее собственное значение остается близким к нулю. Таким образом, беря во внимание результаты как статистического анализа, так и результаты анализа сопровождающей матрицы, мы приходим к выводу о наличии единственного коинтеграционного вектора в нашей модели.

Далее, полагаясь на наложенный коинтеграционный ранг  $r = 1$ , мы можем провести следующие статистические тесты: тесты на (тренд-)стационарность переменных, тест о возможном исключении какой-либо переменной из коинтеграционного вектора и тест о статусе переменных как слабо экзогенных по отношению к параметрам коинтеграционного вектора. Тест на (тренд-)стационарность переменных был предложен в Johansen & Juselius (1992). Этот тест является разновидностью теста Дикки-Фуллера с той разницей, что в нем используется не одна, а все переменные, которые есть в модели, и в том, что нулевая гипотеза соответствует стационарности переменной. Этот тест основан на том, что только стационарная линейная комбинация  $I(1)$  переменных или только сама стационарная переменная могут принадлежать к коинтеграционному пространству. Таким образом, этот тест проверяет возможность того, что коинтеграционный вектор состоит из одной переменной. Соответствующая статистика имеет  $\chi^2$  распределение с  $k - r = 2$  степенями свободы.

Тест о возможном исключении какой-либо переменной из коинтеграционного вектора был предложен в Johansen & Juselius (1992). Соответствующая статистика имеет  $\chi^2$  распределе-

Таблица 5: Модель VAR: тесты на слабую экзогенность по отношению к параметрам коинтеграционного вектора и на исключение из коинтеграционного вектора

Слабая экзогенность					Исключение из коинтеграционного вектора				
$(m-p)_t$	$y_t$	$i_t$	$\chi^2(1)$	Р-значение	$(m-p)_t$	$y_t$	$i_t$	$\chi^2(1)$	Р-значение
0	.	.	11,420	[0,001]**	0	.	.	24,350	[0,000]**
.	0	.	4,978	[0,026]*	.	0	.	23,048	[0,000]**
.	.	0	2,779	[0,096]	.	.	0	8,450	[0,004]**
$(m-p)_t$	$y_t$	$i_t$	$\chi^2(2)$	Р-значение					
.	0	0	6,690	[0,036]*					

Замечания: '0' обозначает наложенное ограничение, что соответствующий коэффициент равен нулю, '.' обозначает отсутствие какого-либо ограничения.

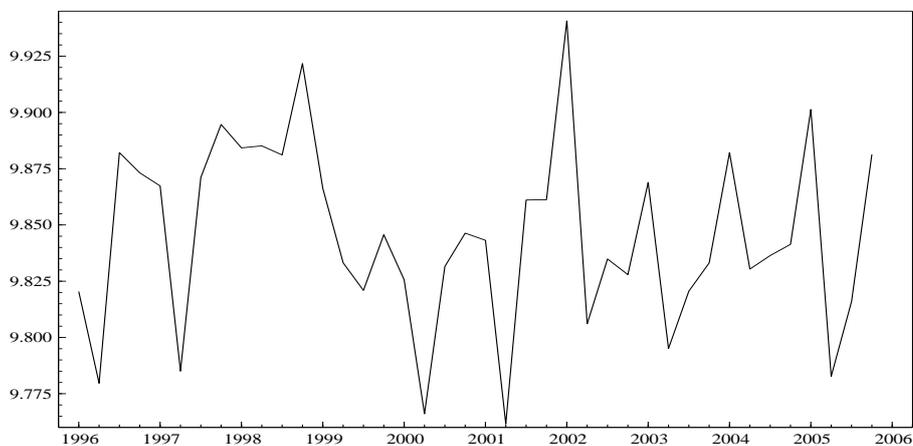


Рис. 3: Модель VAR: коинтеграционный вектор

ние с  $r = 1$  степенями свободы. Тест о статусе переменных как слабо экзогенных по отношению к параметрам коинтеграционного вектора проверяет нулевую гипотезу, что зависимые переменные не реагируют на отклонения от долгосрочного равновесия между рассматриваемыми переменными, представленными коинтеграционным вектором.

Таблицы 4 и 5 содержат результаты вышеперечисленных тестов. Нулевая гипотеза, что моделируемые переменные являются (тренд-)стационарными, решительно отвергается. Также на уровне значимости 1% отвергается нулевая гипотеза, что переменные  $(m-p)_t$ ,  $y_t$  и  $i_t$  могут быть исключены из коинтеграционного вектора (см. правую панель таблицы 5).

Согласно результатам теста о статусе переменных как слабо экзогенных по отношению к параметрам коинтеграционного вектора (см. левую панель таблицы 5) мы не можем отклонить нулевую гипотезу, что переменные  $y_t$  и  $i_t$  являются слабо экзогенными, на уровнях значимости 1% и 5%, соответственно. Результат проверки совместной гипотезы, что обе переменные одновременно являются слабо экзогенными, также подтверждает нулевую гипотезу с соответствующим Р-значением  $p=0,036$ . Для проверки стабильности полученного результата по отношению к размеру выборки мы протестировали совместную нулевую гипотезу рекурсивно. Полученная статистика, пронормированная критическим значением, которое соответствует уровню значимости 1%, отображена на нижней панели Рис. 4. Как видно, то ограничение, что обе переменные  $y_t$  и  $i_t$  являются слабо экзогенными, не может быть отвергнуто для всех подвыборок. Основываясь на этом, в дальнейшем анализе мы будем

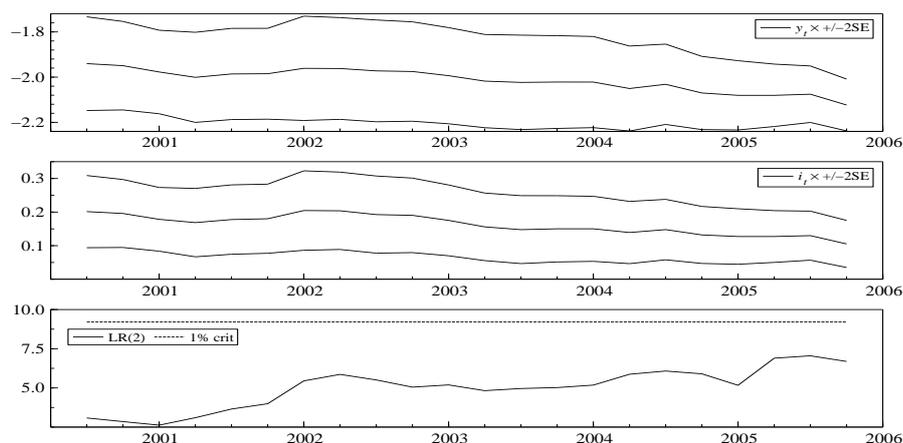


Рис. 4: Модель VAR: рекурсивно оцененные коэффициенты коинтеграционного вектора (верхняя и средняя панели); рекурсивно оцененная статистика нулевой гипотезы о совместном статусе слабой экзогенности переменных  $y_t$  и  $i_t$  по отношению к параметрам коинтеграционного вектора, пронормированная 1% критическим значением (нижняя панель)

рассматривать эти переменные как слабо экзогенные по отношению к параметрам коинтеграционного вектора.

### Модель долгосрочного спроса на деньги

Наложение ограничений, обусловленных статусом слабо экзогенных переменных  $y_t$  и  $i_t$  по отношению к параметрам коинтеграционного вектора, приводит к следующим результатам

$$(m - p)_t = \begin{matrix} 2,123 & - & 0,105 \\ (0,057) & & (0,035) \end{matrix} y_t - i_t + \text{const}, \quad (3)$$

где под оценками коэффициентов в скобках приводятся соответствующие стандартные ошибки. Оцененные коэффициенты имеют ожидаемые знаки, и они статистически значимо отличаются от нуля. Оцененный коинтеграционный вектор изображен на Рис. 3. На верхней и средней панелях Рис. 4 отображены рекурсивно оцененные коэффициенты для переменных  $y_t$  и  $i_t$ , и, как видно, они являются стабильными по отношению к изменяющемуся размеру выборки.

На данном этапе уместно сравнить наши точечные оценки долгосрочных эластичностей с результатами более 500 других исследований, обобщенными в Knell & Stix (2006). Авторы сообщают, что среднее и медиана всех собранных эластичностей по отношению к валовому продукту равны примерно единице, хотя присутствует значительный разброс ее значений. Они также находят, что эластичность денежного спроса по отношению к валовому продукту, рассчитанная для стран Еврозоны, составляет примерно 1,28 или 1,42, в зависимости от того, как суммировались результаты различных исследований. Цифра 1,28 была получена взятием средневзвешенного от всех соответствующих эластичностей, отдельно рассчитанных для каждой страны Еврозоны. Тогда как цифра 1,42 была получена взятием среднего значения всех эластичностей, рассчитанных одновременно для нескольких стран Европы, т.е. данные были обобщены перед проведением оценивания модели.

Видно, что наша оценка эластичности денежного спроса по отношению к валовому продукту в Латвии является сравнительно высокой, чем найденная для стран Еврозоны. С другой стороны, она близка к оценке, найденной в Tillers (2004) (2,35), и она несколько выше, чем оценки, полученные в Dreger, Reimers & Roffia (2006), в зависимости от метода оценивания: 1,73, 1,94 и 1,78 – для методов оценивания, предложенных в Pedroni (1999), Mark & Sul (2003)



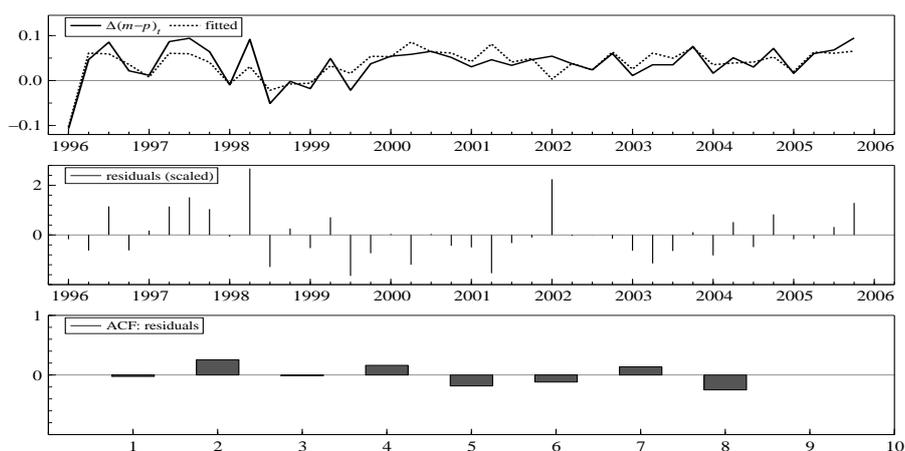


Рис. 5: Модель исправления ошибок: действительные и подобранные значения (верхняя панель); остатки регрессии (средняя панель); автокорреляционная функция остатков регрессии (нижняя панель)

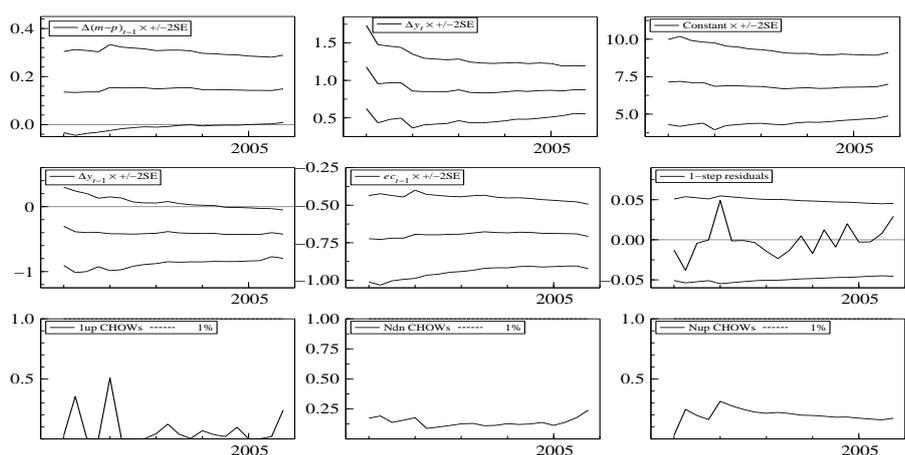


Рис. 6: Модель исправления ошибок: анализ стабильности оцененных параметров

содержит информацию о долгосрочном равновесном отношении между денежной массой, валовым внутренним продуктом и долгосрочной процентной ставкой. Модель проявляет стабильность коэффициентов и способность точно прогнозировать денежную массу в течение последних трех лет.

Согласно полученным результатам, можно сделать следующие выводы. Оценка долгосрочной эластичности денежного спроса по отношению к валовому продукту в Латвии не только больше единицы, но и превышает значение эластичности, полученной для стран Западной Европы. В то же время оценка долгосрочной эластичности денежного спроса по отношению к долгосрочной процентной ставке значительно ниже, чем средняя оценка, основанная на 440 и 367 исследований денежного спроса, результаты которых были обобщены в Fase (1993) и Knell & Stix (2003), соответственно. Таким образом, наши результаты подтверждают наблюдение, сделанное в Dreger, Reimers & Roffia (2006), что спецификация модели долгосрочного денежного спроса для стран Восточной Европы с переходной экономикой, скорее всего, отличается от подобной спецификации, применимой для стран Еврозоны.

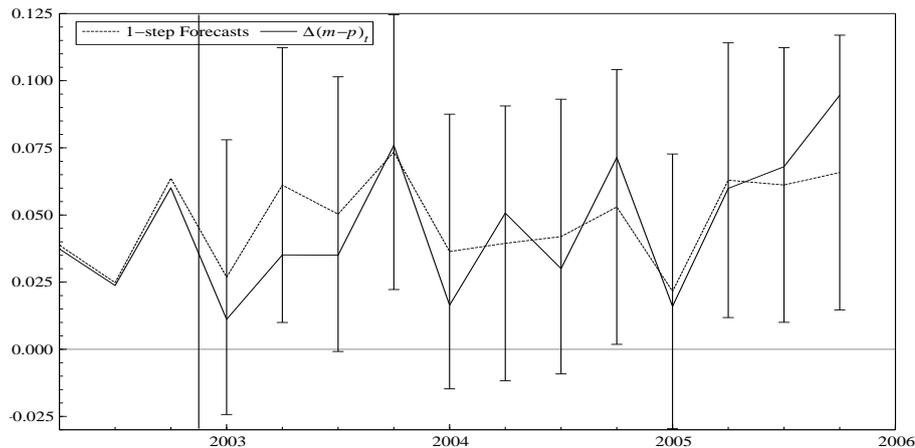


Рис. 7: Модель исправления ошибок: одношаговые прогнозы

## Список литературы

- Andronescu, A., H. Mohammadi & J.E. Payne (2004). Long-run estimates of money demand in Romania. *Applied Economics Letters* 11, 861–864.
- Bahmani-Oskooee, M. & M.P. Barry (2000). Stability of the demand for money in an unstable country: Russia. *Journal of Post-Keynesian Economics* 22, 619–629.
- Banerjee, A., M. Marcellino & C. Osbat (2001). Some cautions on the use of panel methods for integrated series of macroeconomic data. IGER working paper No 170.
- Bolharyn, I.V. & K. Babaian (1998). Modeling money demand in the Ukrainian economy. *Russian and East European Finance and Trade* 34, 45–55.
- Breitung, J. (2005). A parametric approach to the estimation of cointegration vectors in panel data. *Econometric Reviews* 24, 151–173.
- Buch, C.M. (2001). Money demand in Hungary and Poland. *Applied Economics* 33, 989–999.
- Doornik, J.A. & H. Hansen (1994). A practical test for univariate and multivariate normality. Discussion Paper, Nuffield College, Oxford.
- Doornik, J.A. & D.F. Hendry (2001a). GiveWin: An Interface to Empirical Modelling. London: Timberlake Consultants Press.
- Doornik, J.A. & D.F. Hendry (2001b). Modelling Dynamic Systems Using PcGive, Volume II. London: Timberlake Consultants Press.
- Dreger, C., H.-E. Reimers & B. Roffia (2006). Long-run money demand in the new EU member states with exchange rate effects. ECB working paper series No 628.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica* 50, 987–1007.
- Fase, M. (1993). The stability of the demand for money in the G7 and EC countries: A survey. Research Memorandum WO&E Nr. 9321.
- Godfrey, L.G. (1978). Testing for higher order serial correlation in regression equations when the regressors include lagged dependent variables. *Econometrica* 46, 1303–1313.
- Hendry, D.F. & K. Juselius (2000). Explaining cointegration analysis. Part 1. *Energy Journal* 21, 1–42.
- Hendry, D.F. & K. Juselius (2001). Explaining cointegration analysis. Part 2. *Energy Journal* 22, 75–120.
- Hendry, D.F. & G.E. Mizon (1993). Evaluating econometric models by encompassing the VAR. In P. C. Phillips (Ed.), *Models, Methods and Applications of Econometrics*, Basil Blackwell.

- Johansen, S. (1992). Testing weak exogeneity and the order of cointegration in UK money demand. *Journal of Policy Modeling* 14, 313–334.
- Johansen, S. & K. Juselius (1992). Testing structural hypotheses in a multivariate cointegration analysis of the PPP and the UIP for the UK. *Journal of Econometrics* 53, 211–244.
- Karla, S. (1999). Inflation and money demand in Albania. *Russian and East European Finance and Trade* 35, 82–105.
- Knell, M. & H. Stix (2003). How robust are money demand estimations? A meta-analytic approach. Working Paper 81, Oesterreichische Nationalbank.
- Knell, M. & H. Stix (2006). Three decades of money demand studies: Differences and similarities. *Applied Economics* 38, 805–818.
- Mark, N.C. & D. Sul (2003). Cointegration vector estimation by panel DOLS and long-run money demand. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 65, 665–680.
- Oomes, N. & F. Ohnsorge (2005). Money demand and inflation in dollarized economies: The case of Russia. *Journal of Comparative Economics* 33, 462–483.
- Osterwald-Lenum, M. (1992). A note with quantiles of the asymptotic distribution of the maximum likelihood cointegration rank test statistics. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 54, 461–72.
- Payne, J.E. (2003). Post stabilization estimates of money demand in Croatia: Error correction model using the bounds testing approach. *Applied Economics* 35, 1723–1727.
- Pedroni, P. (1999). Critical values for cointegration tests in heterogeneous panels with multiple regressors. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 61, 653–670.
- Ramsey, J.B. (1969). Test for specification errors in classical linear least squares regression analysis. *Journal of the Royal Statistical Society B* 31, 350–371.
- Slavova, S. (2003). Money demand during hyperinflation and stabilization: Bulgaria, 1991-2000. *Applied Economics* 35, 1303–1316.

## Modelling Demand for Money in Latvia

Boriss Siliverstovs

*DIW Berlin, Germany*

This study develops an error correction model for money demand in Latvia. The core of the model is a single cointegrating vector containing information about the long-run equilibrium between the real money balances, gross domestic product, and long-term interest rate. The model exhibits coefficient stability and has proved to accurately predict the money balances during the last three years.

*Keywords: money demand, new EU member states, Latvia*

*JEL Classification: C32, E41.*



# Социально-экономические детерминанты курения в России\*

Сергей Арженовский<sup>†</sup>

*Ростовский государственный экономический университет, Ростов-на-Дону, Россия*

Исследуются детерминанты начала курения и отказа от вредной привычки, а также «тяжести» курения на основе данных РМЭЗ. Выявлено асимметричное влияние цены дешевых и дорогих сигарет на начало и отказ от курения. Подтвержден привыкающий характер потребления сигарет. Обнаружены возможности сокращения курения путем пропаганды здорового образа жизни.

*Ключевые слова:* Россия, курение, анализ продолжительности, модель рисков  
*Классификация JEL:* C41, D12, I12.

## 1 Введение

По данным Росстата РФ, на табак и алкоголь население тратит 4–5% своих доходов. Россияне израсходовали на сигареты в 2001 году по одним оценкам 1,46 млрд. долларов (Росстат РФ), по другим – 5–6 млрд. долл. (IRG VS). Курение является врагом номер один. В России курят 67% мужчин (в три раза больше, чем, например, в США) и 30% женщин, причем приобщение к табаку начинается в возрасте до 11-ти лет, в 7–8 классах школы систематически курят 8–12%, в 9–10-х классах – 21–24%.

Актуально предвидеть, какие меры могут привести к стимулированию ведения здорового образа жизни, и какие последствия могут иметь государственные программы по борьбе с курением. Неясно, как влияет изменение цен на сигареты на потребление табака в России. Важно понять, какие причины побуждают к началу курения и его продолжению.

В настоящей работе впервые на российских данных исследованы экономические аспекты потребления табака. Цель исследования – анализ факторов, определяющих преодоление двойного барьера, – начало курения и отказ от курения, а также детерминанты потребления табака.

Теоретической основой исследования являлись модели формирования зависимости, использующие привыкающий характер курения. Эконометрическим инструментарием являлись множительные оценки Каплана–Мейера, модели пропорциональных рисков Кокса и регрессии на панельных данных. Использовались данные шести раундов Российского мониторинга экономики и здоровья населения (РМЭЗ, или RLMS – Russian Longitudinal Monitoring Survey), за 1994–2001 гг. и данные Росстата о ценах на сигареты в регионах.

Следует отметить, что исследований, посвященных тем или иным аспектам экономики курения, достаточно много. Chaloupka & Warner (1999) содержит добротный обзор имеющихся работ как теоретического, так и эмпирического характера. В большинстве современных исследований спроса на сигареты используется привыкающий характер курения, причем авторы следуют модели рационального привыкающего поведения, предложенной в Becker & Murphy (1988). Мы также неявно следуем этой модели. Однако центральными в формировании антитабачной политики являются вопросы, почему люди начинают курить и почему отказываются от привычки курения. Адекватным инструментом для измерения и анализа риска перехода между состояниями приобретения привычки и отказа от нее являются

\*Цитировать как: Арженовский, Сергей (2006) «Социально-экономические детерминанты курения в России», Квантиль, №1, стр. 81–100. Citation: Arzhenovsky, Sergey (2006) “Socioeconomic determinants of smoking in Russia,” *Quantile*, No.1, pp. 81–100.

<sup>†</sup>Адрес: 344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 69, РГЭУ, Кафедра математической статистики, эконометрики и актуарных расчетов. Электронная почта: [asv1@nm.ru](mailto:asv1@nm.ru)

модели продолжительности. Основная проблема при построении этих моделей заключается в цензурировании выборки, поскольку индивиды, которые не курят – либо вообще не курят, либо отказались от привычки курения (проблема двойного барьера). Labeaga (1999) учитывает цензурирование при оценивании модели рационального привыкания, используя подход с двойным барьером, в предположении, что индивид является сначала потенциальным курильщиком (хочет курить), а затем максимизирует свою потребительскую функцию полезности, то есть действительно курит. Проблема цензурирования решается и в работе Beenstock & Rahav (2003), где авторы использовали модель продолжительности для исследования процесса начала потребления наркотических веществ. Авторы выделяют цензурированных индивидов, которые никогда не будут потреблять наркотические вещества, и тех, для которых начало потребления – вопрос времени.

Следуя указанным работам, мы считаем риском начала курения вероятность начала курения в данный момент времени при условии, что индивид не курил ранее. Риск отказа от курения – вероятность отказа от привычки в данный период при условии, что индивид курит с момента начала курения. Эти две величины по-разному реагируют на факторы, поскольку первая отражает точку зрения некурящих, а вторая – курильщиков.

Другим инструментом оценивания риска начала или отказа от курения являются модели участия. В частности, Douglas (1988) исследовал факторы, влияющие на решения о начале и прекращении курения в рамках модели рационального привыкания с помощью упорядоченной пробит-модели для расщепленной по полу выборки, в которой выделены индивиды никогда не курившие, начавшие и бросившие курить, и начавшие и продолжающие курить. Цена сигарет являлась переменной, изменяющейся по времени. Для модели начала курения использовалось лог-логистическое распределение, а для модели прекращения курения – распределение Вейбулла. Автор получил значимые оценки для цены в обеих моделях, однако для модели инициирования курения эффект цены мал. Jones (1989) оценил пробит модель с двойным барьером для попытки бросить курить и ее успешной реализации. Важная переменная цены не была включена в модель.

Однако, как нам представляется, модели продолжительности имеют некоторые преимущества по сравнению с моделями участия (пробит-модели), поскольку в последних трудно контролировать эффект продолжительности привычки. Отметим в этой связи обстоятельную недавнюю работу Forster & Jones (2001), в которой получены оценки налоговой эластичности 0,16 для мужчин и 0,08 для женщин для возраста начала курения и  $-0,60$  и  $-0,46$  соответственно для продолжительности курения. Forster & Jones (2001) описывают проблемы с данными о потреблении табака, а также возможности эконометрики по тестированию на ошибки спецификации моделей продолжительности, что мы используем в своем исследовании. Наконец, Tauras (1999) и Tauras, O'Malley & Johnston (2001) оценивали параметрические и полупараметрические модели продолжительности для моделирования прекращения курения среди молодежи. Оценки показывают, что увеличение цены сигарет увеличивает вероятность отказа от курения. Средняя ценовая эластичность прекращения  $-0,343$ . Кроме того, получены значимые ограничения курения на рабочем месте и в публичных местах, увеличивающие вероятность отказа от курения для молодежи.

К сожалению, в России нет традиций эконометрического анализа потребления табака. В имеющихся фрагментарных исследованиях чаще всего констатируются отрицательные последствия курения на основе статистических данных.

## **2 Инициирование и прекращение курения: модель пропорциональных рисков Кокса**

В нашем распоряжении имеются панельные данные РМЭЗ, позволяющие существенно расширить рамки традиционного статистического анализа данных, а также не ограничиваться

только анализом таблиц сопряженностей и другими стандартными инструментами. Поскольку данные позволяют установить дату начала и окончания курения, мы используем наиболее адекватный в этом случае эконометрический аппарат анализа длительностей для «данных времени жизни».

Мы используем сообщенный респондентами возраст начала курения для определения календарного года начала курения для тех индивидов, которые когда-либо курили. Однако выборка содержит также индивидов, которые никогда не курили. В полупараметрической модели продолжительности такие наблюдения интерпретируются как неполные периоды, и принимается, что все индивиды терпят неудачу при инициировании курения. Эти наблюдения классифицируются как цензурированные справа по году опроса РМЭЗ (Beenstock & Rahav, 2003).

На начальном этапе анализа факторов, влияющих на «риск» начала курения, используется непараметрический анализ. Он особенно удобен для того, чтобы выдвинуть гипотезы по поводу теоретического распределения длительностей до момента прекращения. Одним из результатов этого анализа является то, что при оценке функции риска и функции выживания он позволяет получить графическое представление этих функций с учетом наличия цензурированных данных. Наиболее распространенным непараметрическим методом является множительная оценка Каплана–Мейера (Lancaster, 1990). Преимущество данной оценки заключается в том, что она позволяет учесть наличие цензурирования и одинаковых по длительностям наблюдений в выборке.

Важной задачей предварительного анализа данных является сравнение кривых функций надежности для различных страт/подгрупп. Сходство кривых может быть оценено с помощью ряда критериев. Мы воспользуемся логарифмически ранговой статистикой как наиболее распространенным критерием, чтобы определить, включать ли соответствующую переменную в результирующую модель или нет.

Для оценки совместного эффекта факторов, влияющих на инициирование/прекращение курения, используются параметрические и полупараметрические модели (Cox & Oakes, 1984; Lancaster, 1990). Надежной и широко применяемой в этом случае является модель пропорциональных рисков Кокса (Cox, 1972). Модель пропорциональных рисков уместна по причине простой и доступной интерпретации основной ее идеи о том, что влияние на длительность события соответствует умножению функции риска на постоянный множитель, который определяется экзогенными факторами:

$$\lambda(t|X, \beta) = \lambda_0(t)\varphi(X, \beta), \quad (1)$$

где  $X$  – вектор объясняющих переменных,  $\beta$  – вектор параметров, подлежащих оцениванию,  $\lambda_0(t)$  – функция базового риска, которая соответствовала бы результирующей функции риска при отсутствии влияния экзогенных факторов, т.е. функция базового риска показывает эндогенный риск прекращения события.

Определим функцию индивидуального специфического риска  $\lambda(t|X, \beta)$  в экспоненциальной форме:

$$\lambda(t|X, \beta) = \lambda_0(t) \exp(\beta' X). \quad (2)$$

Одно из достоинств метода состоит в том, что он не требует спецификации формы функции базового риска (Cox, 1972; Cox & Oakes, 1984). Однако одним из важных предположений модели (1) является пропорциональность рисков, т.е. отношение функций рисков для двух членов совокупности должно оставаться постоянным в течение всего периода наблюдения. Регрессионный параметр  $\beta_j$  в спецификации (2) содержит пропорциональный эффект влияния абсолютных изменений, соответствующей переменной  $X_j$  на степень риска:

$$\beta_j = \partial \ln \lambda(t, X) / \partial X_j.$$

Также коэффициент  $\beta_j$  дает эластичность риска по  $X_j$  (Jenkins, 2004). Оценки параметров в модели Кокса (2) могут быть найдены с помощью метода частного правдоподобия (Cox, 1972).

Для построения модели прекращения курения мы используем продолжительность курения в качестве меры длительности и выборку из индивидов, которые когда-либо курили, а затем или бросили курить, или продолжают курить. Последние будут подвержены цензурированию справа по году опроса РМЭЗ. В модели (2) из-за различий распределений отдельных индивидов, несмотря на учет уместных экзогенных переменных, может возникнуть ненаблюдаемая гетерогенность, которая ведет к смещенности оценок и к обманчивым выводам о влиянии объясняющих переменных на риск (Heckman & Singer, 1984). Для учета ненаблюдаемой гетерогенности в модель (2) добавим случайную, специфичную для отдельных групп индивидов, переменную  $g_i$  с гамма-распределением:

$$\lambda_{ij}(t, X_{ij} | g_i) = \exp(\beta' X_{ij}) \lambda_0(t) g_i = \exp(\beta' X_{ij} + \nu_i) \lambda_0(t), \quad (3)$$

где  $i$  – индекс по группам гетерогенности,  $j$  – индекс по наблюдениям в группе,  $g_i$  – ненаблюдаемая гетерогенность, причем  $\mathbb{E}[g_i] = 1$ ,  $\mathbb{V}[g_i] < \infty$  и  $\nu_i = \ln(g_i)$ .

На основе оценок дисперсии  $\nu_i$  и ее стандартной ошибки можно протестировать значимость гетерогенности в модели (3). Также выбор между моделями (3) и (2) осуществляется с помощью статистики отношения правдоподобия, имеющей  $\chi^2$  распределение.

Мы используем доступные тесты для проверки построенных моделей на ошибки спецификации. Легко можно проверить соответствие долей начавших (бросивших) курить, предсказанных по модели и реализованных в выборке. Мы также используем графическое представление кумулятивных ошибок Кокса–Шнелла (Klein & Moeschberger, 1997; Lancaster, 1990) для наблюдаемых отказов в выборке, чтобы оценить подгонку модели для тех индивидов, кто отказывается от курения (продолжает курить для модели прекращения курения). Правильно подогнанная модель должна давать кумулятивные ошибки Кокса–Шнелла, похожие на выборку из стандартного экспоненциального распределения. Поэтому график непараметрической оценки кумулятивной функции риска для таких данных должен располагаться на линии 45 градусов от начала координат (биссектриса первого квадранта). Чем больше отклонение от биссектрисы для оцененной кривой, тем хуже специфицирована модель.

Для тестирования основного предположения модели Кокса о пропорциональности рисков используем взвешенные ошибки Шоенфельда и тест как для отдельных переменных, так и глобальный тест (Grambsch & Therneau, 1994). Взвешенные ошибки Шоенфельда не зависят от времени и имеют нулевое матожидание при нулевой гипотезе о пропорциональных рисках. При альтернативе, когда риски непропорциональны, ошибки зависят от времени. Глобальный тест имеет асимптотическое распределение  $\chi^2$ .

### 3 Информационная база исследования, конструирование выборки и характеристика переменных

Для целей исследования формируются две выборки на основе данных обследования РМЭЗ, пятая – десятая волны (1994–2001 гг.). Мы используем данные двух типов: семейные и индивидуальные. Слияние выборок осуществляется с использованием идентификационных номеров индивидов. Анализируется подвыборка индивидов в возрасте от 14 до 65 лет, для которых имеется соответствующий набор основных изучаемых переменных. Первая выборка, используемая для изучения инициирования и прекращения курения, формируется как объединенная по всем индивидам, когда-либо участвовавшим в опросе. Вторая выборка формируется как панель по индивидам, которые курят, и для которых известно количество потребляемых ими сигарет.

Таблица 1: Определение переменных и выборочные средние

Переменная	Определение	Инициирование		Прекращение	
		Муж	Жен	Муж	Жен
Marst	= 1 если женат/замужем	0,42	0,54	0,67	0,52
Urban	= 1 если место жительства – город	0,69	0,68	–	–
Sport	Физическая активность, 1 – легкие физические упражнения для релаксации, меньше чем три раза в неделю, 2 – средние и интенсивные физические упражнения, меньше чем три раза в неделю, 3 – интенсивные физические упражнения не менее трех раз в неделю по 15 минут и более, 4 – ежедневные упражнения не менее 30 минут в день, 0 – не занимается	–	–	0,58	0,52
Numhh	Количество членов домохозяйства	3,71	3,36	–	–
Selfhealth	Самооценка здоровья в прошедшем периоде: 1 – очень хорошее, 2 – хорошее, 3 – среднее, не хорошее и не плохое, 4 – плохое, 5 – очень плохое	2,43	2,87	2,73	2,86
Prof	Профессиональные группы, 1 – законодатели, топ-менеджеры, чиновники, офисные служащие, специалисты и техники	–	–	0,23	0,46
Durationcat	Категории продолжительности курения, 1 – <5 лет, 2 – 6–10 лет, 3 – 11–20 лет, 4 – 21–30 лет, 5 – 31–40 лет, 6 – 41–50 лет, 7 – 51+ лет	–	–	3,15	2,12
Pricegks	Цена за пачку из 20 сигарет	0,43	0,49	0,26	0,29
Pricel	Цена за пачку из 20 дешевых сигарет	0,26	0,25	0,28	0,28
Priceu	Цена за пачку из 20 дорогих сигарет	0,39	0,39	0,38	0,42
	Возраст начала курения	–	–	16,48	19,66
	Средняя продолжительность курения для бросивших курить, лет	–	–	15,17	5,82
	Среднее количество выкуриваемых сигарет в день для курильщиков	–	–	15,18	8,62
	Число наблюдений	1129	3669	1492	434
	Число цензурированных наблюдений	250	149	82	56

Используемая база данных РМЭЗ содержит вопросы индивидуального вопросника, позволяющие разделить всех индивидов на группы: никогда не курившие, ранее курившие и бросившие курить, и курящие. Также имеются вопросы, позволяющие установить для курящих возраст начала курения (календарный год), а также количество выкуренных за день сигарет, для индивидов, бросивших курить, – продолжительность курения (календарный год окончания курения), для некурящих – информацию о том, что они никогда не курили. В то же время мы не знаем, бросят ли курить в будущем курящие, и начнут ли курить некурящие, поэтому для таких индивидов мы имеем цензурированные справа данные.

Выборка по начавшим курить содержит 4798 индивидов (в том числе 24% мужчин), из которых начали курить 399 человек (см. таблицу 1). Выборка для прекративших курить содержит 1926 индивидов (в том числе 77% мужчин), из которых бросили курить 138 человек. В среднем юноши начинают курить в 16,5 лет, а девушки несколько позже – в 19,7. Отказавшиеся от курения употребляют сигареты около 12 лет, причем женщины бросают курить в среднем после 5 лет, т.е. в возрасте около 25 лет. Больше курят мужчины – в среднем около 15 сигарет в день (т.е.  $\frac{3}{4}$  пачки сигарет), женщины курят меньше – около 9 сигарет в среднем за день.

Структура выборки по годам обследования РМЭЗ позволяет заключить, что доли мужчин и женщин, потребляющих никотин, выравниваются с 1994 г. по 2001 г. на 7% за счет

все большего употребления сигарет женщинами, причем 4% из указанных достигается за счет вовлечения в курение молодежи до 30 лет. Распределение средней продолжительности курения в зависимости от возраста показывает факт увеличения прироста средней продолжительности курения с увеличением возрастной категории. Дополнительный анализ данных позволяет сделать вывод о том, что дети начинают курить раньше родителей. Увеличение прироста продолжительности курения происходит после 30 лет, что свидетельствует о том, что существенная часть индивидов бросает курить в возрасте до 30 лет.

По ответу на вопрос «Вы курите в настоящее время?», задаваемый одним и тем же индивидам в разные раунды РМЭЗ, установлены индивиды, которые курили, бросили курить и начали курить снова: всего 571 человек, из них 64% мужчин. Для 58% индивидов, пытавшихся отказаться от курения, продолжительность перерыва составила не более 2 лет. Не для всех из них точно удается установить год начала курения или год отказа от курения (в том числе из-за того, что опрос РМЭЗ не проводился в 1997 и 1999 гг.), а также не все имеют полный набор объясняющих переменных. Поэтому в модели инициирования курения мы учитываем 40 индивидов как начавших курить, и в модели прекращения курения – 18 индивидов как отказавшихся от курения, из указанных 571 человека.

Информация о ценах за пачку из 20 сигарет может быть получена на основе ответов на вопросы семейного вопросника. Эти данные являются смещенными и они отсутствуют для тех лет, когда опрос РМЭЗ не проводился. Переменная цены на сигареты является релевантным инструментом политики регулирования табачного рынка. Поэтому наши оценки могут рассматриваться как эластичности, связанные с влиянием относительного изменения в уровне цен на начало и прекращение курения.

Механизм формирования розничной цены на сигареты включает в себя отпускную цену с учетом акцизов, торговую надбавку к отпускной цене, налог на добавленную стоимость и транспортные издержки. Величина торговой надбавки примерно одинакова по регионам. Ставки акцизов и других налогов регулируются на федеральном уровне. Ставка акциза на табачные изделия зависит от вида продукции: табак, сигары, сигареты с фильтром, сигареты без фильтра, и не привязана, например, к содержанию никотина в продукте. Транспортные издержки с учетом работающих в регионах России более 60 табачных фабрик не играют существенной роли в формировании розничных цен. Таким образом, неясно, что является причиной межрегиональных различий в ценах на табачные изделия. Возможно, вариация в ценах скрывает различия в потреблении между регионами: в регионах с высоким уровнем жизни населения курят более качественные и дорогие сорта сигарет, а в регионах с низким уровнем жизни – курят дешевые сигареты. Тогда различия в ценах обусловлены вариацией доходов между регионами, и это надо учитывать при интерпретации эластичностей. Для того, чтобы учесть предпочтения в потреблении сигарет по регионам, сформируем прокси-переменные региональных цен на дешевые и дорогие сигареты. Очевидно, можно предположить, что бедные домохозяйства потребляют дешевые сорта сигарет, а богатые домохозяйства потребляют, как правило, дорогие сорта сигарет. Выделим нижний (2-й) и верхний (8-й) децили распределения домохозяйств по доходам и усредним по рсу (первичная единица отбора в базе РМЭЗ) потребительские цены на табак, рассчитанные по РМЭЗ для этих домохозяйств. Получим цену на сигареты  $price1$  для 20% домохозяйств с низкими доходами и цену на сигареты  $priceu$  для 20% домохозяйств с высокими доходами. Дефлируем полученные цены на стоимость потребительской корзины по регионам (Рис. 1).

Другим источником информации о ценах являются данные Росстата – показатель средних потребительских цен на сигареты и папиросы отечественного производства за 1 пачку в нескольких городах по регионам РФ по состоянию на месяц проведения опроса РМЭЗ (или декабрь, если в этот год опрос не проводился). Цены Росстата также были дефлированы. Таким образом, имеем три переменных цены: по данным Росстата –  $pricegks$ , и по данным РМЭЗ –  $price1$  и  $priceu$ . В среднем реальная цена сигарет составляет по Росстату – около

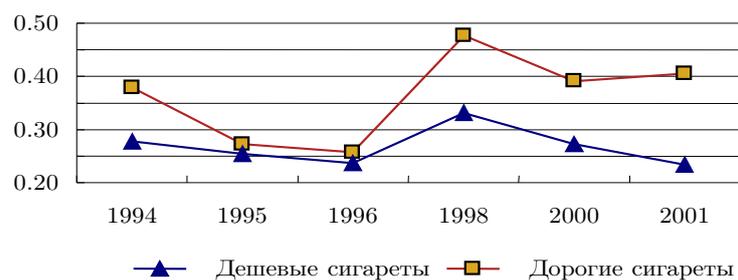


Рис. 1: Реальные цены на сигареты, руб. за пачку, РМЭЗ, 1994–2001 гг.

0,35 руб. за пачку, по данным РМЭЗ – около 0,27 руб. за пачку дешевых сигарет и 0,36 руб. за пачку дорогих сигарет. Также отметим, что начинающие курить потребляют более дорогие сигареты, чем бросающие курить: реальная средняя цена (по Росстату) составляет соответственно 0,48 и 0,31 руб. за пачку. Следовательно, эластичность по цене должна быть выше для прекращения курения по сравнению с началом курения.

Отметим, что доля расходов на табачную продукцию составила в среднем за 1994–2001 гг. около 5% от доходов для 20% домохозяйств РМЭЗ с низким уровнем доходов и около 0,8% для 20% домохозяйств с высокими доходами.

Поскольку мы знаем годы начала и прекращения курения, это позволяет объединить данные РМЭЗ с данными о ценах на сигареты Росстата. Соответствие между ценой и данными РМЭЗ устанавливалось по году начала курения и прекращения курения. Для некурящих (для курящих в модели прекращения курения) индивидов – по последнему году обследования, в котором участвовал индивид. Из объединенной выборки удалены индивиды, которые начали курить (или бросили курить в модели прекращения курения) до 1994 года, поскольку для них цена на сигареты неизвестна в момент времени начала курения (прекращения курения). Таким образом, выборка содержит только тех индивидов, которые начали курить не позже 1994 года, и тех, кто не начал курить, и для которых определена цена сигарет в соответствующем году. Выборка для модели прекращения курения содержит соответственно только тех индивидов, которые прекратили курить не раньше 1994 года или продолжали курить.

Имеются потенциальные проблемы, связанные с предсказанием прошлого поведения как функции от индивидуальных характеристик, которые измерены во время проведения РМЭЗ. Поэтому мы используем ограниченный набор экзогенных переменных для моделей начала и прекращения курения. Причем мы пытаемся по возможности использовать переменные, которые были экзогенно определены до того, как индивид начал или прекратил курить. Поэтому исключены переменные, связанные со здоровьем и изменениями статуса курильщика в последующих после принятия решения о курении периодах, поскольку это может дать ненаблюдаемое гетерогенное смещение, особенно в моделях инициирования курения.

Отметим, что данные РМЭЗ, как и любые ретроспективные данные, содержат ошибки двух типов: респонденты не всегда аккуратно помнят, когда они начали курить, а также, поскольку не уверены в анонимности анкетирования, могут неточно ответить на вопросы о выкуренных сигаретах. Однако, как отмечается в Beenstock & Rahav (2003), эти ошибки не сильно влияют на величину оценок моделей. Для уменьшения такого смещения данные согласно Tunali & Pritchett (1997) преобразовываются так, что переменная продолжительности измеряется в календарном времени как для возраста начала, так и для возраста прекращения курения. Мы использовали этот метод измерения продолжительности времени.

Наборы экзогенных переменных в моделях инициирования курения и прекращения курения различаются за исключением индивидуальных характеристик (пол, семейный статус,

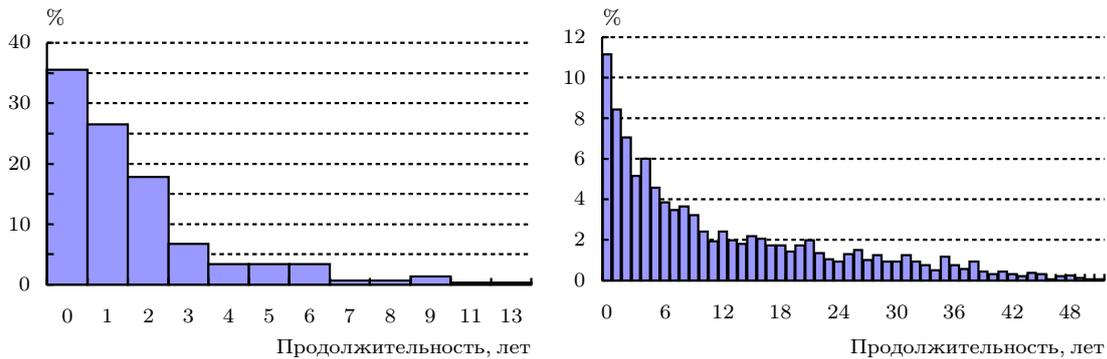


Рис. 2: Распределение продолжительности курения для бросивших курить, РМЭЗ, 1994–2001 гг. (слева); Распределение продолжительности курения для бросивших курить (возраст до 20 лет), РМЭЗ, 1994–2001 гг. (справа)

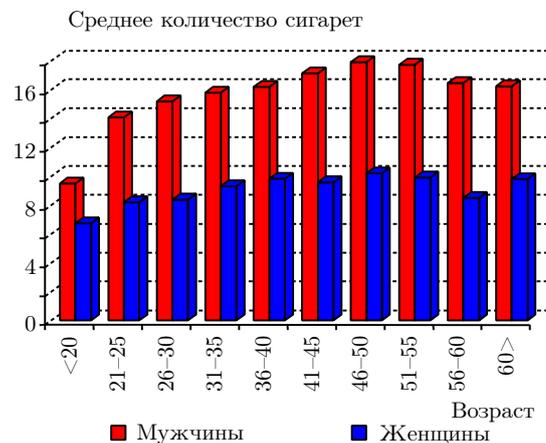


Рис. 3: Среднее количество ежедневно выкуренных сигарет, РМЭЗ, 1994–2001 гг.

самооценка здоровья в период, предшествующий прекращению или иницированию курения) и учета когортного эффекта и временного тренда. Мы считаем, что начало курения в большей степени обусловлено урбанизацией, в частности, более демократичными нормами общественной морали в городе по сравнению с сельской местностью. Также начало курения существенно зависит от количества человек в семье индивида (прокси для дохода и состава домохозяйства). В то же время на прекращение курения, на наш взгляд, воздействуют продолжительность курения и физическая активность индивида, а также его профессия. Мы предполагаем, что физические упражнения малосовместимы с курением. Также, на наш взгляд, более вероятен отказ от курения для «белых воротничков» по сравнению с индивидами рабочих профессий. Привыкающий характер курения проявляется, в частности, в ожидаемом отрицательном воздействии фактора продолжительности курения на отказ от употребления табака. Очевидно также, что курильщики с высоким уровнем дохода реже склонны отказываться от вредной привычки.

Распределение продолжительности курения бросивших курить показывает (Рис. 2), что в первые 5 лет после начала курения бросают курить около 35% курильщиков. Расчеты показали, что среди бросивших курить подростков, бросили курить в первые 3 года после начала курения около 90% (Рис. 2).

На Рис. 3 показано распределение количества выкуренных сигарет в зависимости от воз-

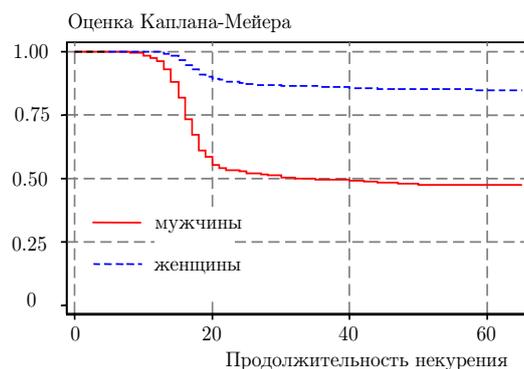


Рис. 4: Оценка функций надежности для инициирования курения по полу, полная выборка

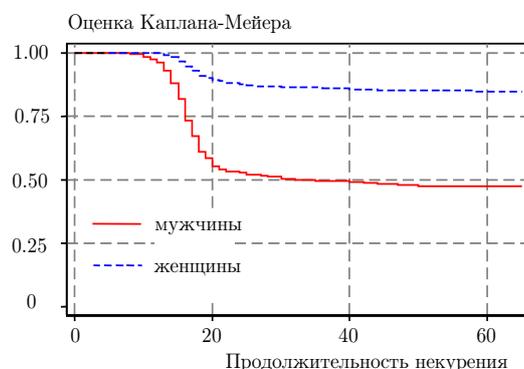


Рис. 5: Оценка функций риска для инициирования курения по полу, полная выборка

растной когорты и пола. Среднее ежедневное количество потребленных сигарет неуклонно увеличивается для мужчин, достигая пика в возрасте 46–50 лет. Для женщин возрастная динамика потребления табака нестабильно увеличивается с пиком в том же возрастном интервале 46–50 лет.

#### 4 Анализ факторов, влияющих на инициирование курения

Нами оценены функции надежности и риска для продолжительности воздержания от курения с помощью процедуры Каплана-Мейера. На Рис. 4 представлены функция надежности для мужчин и женщин отдельно. Также на Рис. 5 представлены функции риска отдельно по полу. Функция надежности монотонно убывает, а начиная с 16 лет – достаточно быстро. Функция риска монотонно возрастает с ярко выраженным локальным максимумом – для возраста около 20-ти без достаточно резких скачков на всей области определения. Для женщин функция риска менее выпуклая, чем аналог для мужчин. Таким образом, начало курения относится к возрасту до 20 лет, причем чаще начинают курить юноши, чем девушки.

Также нами подробно исследована зависимость риска начала курения от возрастной когорты. Убывание функции надежности начинается для молодежи при 10-летней продолжительности некурения, для людей зрелого возраста – при 20-летней, для старшего возраста – при 40-летней. Возможно, такие пороги с шагом 5 или 10 лет обусловлены «эффектом кучи», причина которого в том, что респонденты округляют количество лет при ответах до ближайших, кратных 5 или 10. В Forster & Jones (2001) обсуждаются способы коррекции модели с учетом указанного эффекта и проводится анализ чувствительности оценок для различ-

ных способов, в результате которого получено, что изменения в оценках незначительны. Мы использовали «ad-hoc»-подход добавления фиктивных переменных для «сгруппированных» наблюдений и также не получили существенного изменения в оценках. Колоколообразная кривая функции риска, как для юношей, так и для девушек, с ярко выраженным максимумом в 17 лет соответствует когорте до 30 лет. В зрелом возрасте для женщин кривая функции риска относительно пологая и почти постоянна для женщин старше 50 лет. Для мужчин от 31 до 50 лет график функции риска обнаруживает локальный максимум для возраста около 28 лет, что, возможно, связано с жизненным циклом: мужчина в этом возрасте активно обеспечивает семью, делает карьеру и чаще попадая в стрессовую ситуацию, начинает курить. График функции риска колеблется для когорты старше 50 лет, причем в возрасте после 40 лет имеет два заметных пика, связанных с известным кризисом зрелого возраста у мужчин. Таким образом, необходимо в модели учесть когортный эффект.

В состав вектора объясняющих переменных  $X$  включим следующие факторы: пол (female), семейное положение (marst), место проживания в городе (urban), дефлированные цены пачки сигарет (pricel и priceu), количество членов домохозяйства (numhh), фиктивные переменные для учета эффекта когорт и фиктивные переменные для годов проведения опроса РМЭЗ.

Представляется необходимым учесть в спецификации модели социальные нормы, в частности, распространенность курения среди соответствующих групп. Однако вопросник РМЭЗ не содержит вопросов о том, где и с кем, курит индивид. В этой связи, учитывая традиции совместного распития спиртных напитков в России, хорошим инструментом является индикатор употребления спиртного. Но поскольку потребление алкоголя является эндогенной переменной по отношению к курению, то мы используем прокси-переменную selfhealth самооценки здоровья индивида. Для исключения эндогенности selfhealth и инициирования курения, возьмем лагированные по отношению ко времени начала курения значения переменной.

В целом выборка содержит 42% женатых мужчин и 54% замужних женщин. Более 2/3 индивидов проживает в городе. Мужчины характеризуют свой уровень здоровья как хороший, женщины – как средний (см. таблицу 1).

Значения логарифмического рангового критерия проверки равенства функций надежности по Каплану–Мейеру для включенных в модель инициирования курения переменных позволяют судить о значимой дискриминантной способности всех переменных. В таблице 2 представлены оценки параметров модели пропорциональных рисков Кокса (2) для продолжительности некурения для объединенной выборки и отдельно по полу. Также построена модель инициирования курения с исключенной лагированной переменной selfhealth для увеличения объема выборки, в которой использованы цены Росстата – pricegks; результаты принципиально не отличаются от представленных в таблице 2.

Графики кумулятивных ошибок Кокса–Шнелла (Рис. 6) позволяют сделать вывод о том, что модели обеспечивают удовлетворительное качество прогноза, поскольку ошибки располагаются вдоль линии в 45 градусов, исключая конец интервала. Предсказанная доля начавших курить видна в нижней части таблицы 2. Для общей модели она равна 0,13, что близко фактически наблюдаемому значению 0,08. Тестирование гипотезы о пропорциональности рисков на основе взвешенных ошибок Шoenфельда как для модели в целом, так и по переменным, позволило подтвердить предположение о пропорциональности рисков. Нами были оценены модели (по всей выборке и отдельно по полу) в предположении о возможности ненаблюдаемой гетерогенности с гамма-распределением вида (3). Величина дисперсии  $\nu$ ; гамма-распределения по отношению к ее стандартной ошибке не превысила значения 0,01, что позволяет сделать вывод о том, что ненаблюдаемая гетерогенность не является значимой в наших данных.

Результаты расчетов показывают высокую эластичность риска по цене и различия в реакции населения на повышение цен на дешевые и дорогие сигареты. Напомним, что мы

Таблица 2: Результаты оценки модели Кокса для инициирования курения

Переменные	Вся выборка	Мужчины	Женщины
Female	-1,118** (0,104)	-	-
Selfhealth	0,127* (0,072)	0,023 (0,087)	0,338*** (0,125)
Marst	-0,033 (0,148)	0,012 (0,224)	-0,129 (0,198)
Urban	0,260** (0,112)	0,234* (0,139)	0,297* (0,168)
Pricel	2,781*** (0,389)	2,779*** (0,438)	2,784*** (0,798)
Priceu	-2,619*** (0,385)	-2,965*** (0,446)	-2,054*** (0,716)
Numhh	-0,096*** (0,037)	-0,080* (0,047)	-0,133** (0,062)
30 < Age ≤ 50	-2,479*** (0,241)	-2,415** (0,390)	-2,579*** (0,303)
Age > 50	-3,939*** (0,462)	-3,540*** (0,731)	-4,322*** (0,597)
1995	0,546 (0,627)	0,315 (0,921)	0,871 (0,863)
1996	0,686 (0,561)	0,531 (0,780)	0,994 (0,809)
1998	0,914* (0,541)	0,758 (0,750)	1,239 (0,783)
2000	0,738 (0,551)	0,783 (0,760)	0,697 (0,819)
2001	0,858* (0,521)	0,818 (0,729)	0,983 (0,750)
Субъектов	4798	1129	3669
Провалов	399	250	149
Лог-правдоподобие	-2870,14	-1556,47	-1045,65
$\chi^2$	527,10	152,10	180,46
Предсказанная доля начавших	0,13	0,39	0,29
Наблюдаемая доля начавших	0,08	0,22	0,04

Замечания: В таблице даны значения коэффициентов. Используется метод Бреслоу для обработки отказов. Выборка содержит индивидов начавших курить не ранее 1994 года. Робастные стандартные ошибки (коррекция по группам индивидов) в скобках. Уровни значимости: \* – 10% уровень, \*\* – 5% уровень, \*\*\* – 1% уровень.

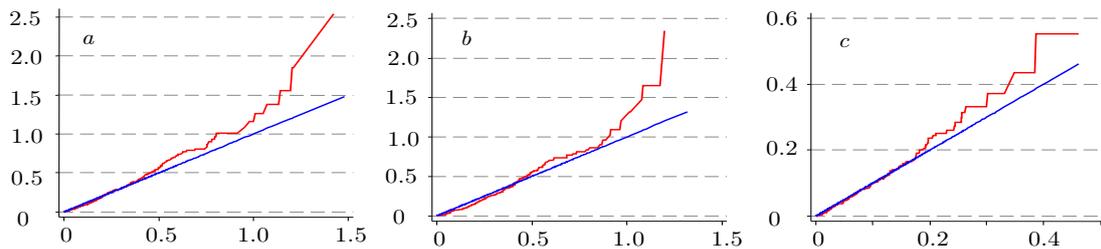


Рис. 6: Кумулятивные ошибки Кокса–Шнелла для модели инициирования курения: полная выборка (а), мужчины (b), женщины (с)

предполагаем, что в богатых домохозяйствах курят более качественные и дорогие сорта сигарет, а в бедных домохозяйствах – курят дешевые сигареты. С увеличением реальной цены на дешевые сигареты на 1 коп. вероятность начала курения в течение короткого промежутка времени увеличивается на 0,03 ( $\exp(0,02781)$ ). Объяснением такого, на первый взгляд, парадоксального факта является дальнейшее снижение уровня жизни при повышении цен, которое и приводит к стрессу и появлению вредных привычек. Увеличение реальной цены дорогих сигарет на 1 коп. за пачку приводит к снижению вероятности начала курения для индивида на 0,025, причем для мужчин ценовая чувствительность выше – вероятность снижается на 0,03, для женщин – на 0,02. Результаты расчетов также свидетельствуют, что риск начала курения на 67% меньше для женщин. В то же время, существенным фактором, влияющим на инициирование курения, является самооценка здоровья в период, предшествующий началу курения (*selfhealth*), причем в большей степени этот фактор значим для женщин. Он повышает вероятность начала курения на 0,14, если в предыдущий период здоровье ухудшалось.

Более склонны (на 30%) к инициированию курения индивиды, проживающие в городе по сравнению с живущими в сельской местности, причем этот фактор важнее для женщин, чем для мужчин. На наш взгляд, это объясняется тем, что общественное мнение в сельской местности еще остается влиятельным фактором и препятствует распространению курения, поскольку считается, что курящие, особенно женщины, нарушают социальные нормы. В то же время в городе общественное мнение относительно вредных привычек терпимее и демократичнее.

Наличие семьи не является значимой переменной для инициирования курения во всех спецификациях модели. С другой стороны, в модель включена переменная количества членов домохозяйства, которая позволяет утверждать, что с увеличением «размера» домохозяйства на 1 человека риск начала курения его члена уменьшается на 9% для объединенной выборки и на 12% для женщин, что, на наш взгляд, вызвано, в первую очередь, рождением детей.

Значим эффект поколений. Так, родившиеся в 70-х годах склонны начинать курить чаще, чем родившиеся в 50-х годах. Фиктивные переменные по времени значимы и показывают, что риск начала курения значительно увеличивается, начиная с 1998 г. и далее в 2001 г., что позволяет сделать вывод о большей вероятности начала курения в начале 2000-х годов. Очевидно, такое положение дел связано с изменившимися по сравнению с серединой 90-х годов социально-экономическими условиями жизни.

Поскольку критическим для начала курения является подростковый возраст, мы построили модели пропорциональных рисков Кокса отдельно для подростков до 20 лет включительно. Важные для нас переменные, являющиеся «откликом» на проводимую властями экономическую политику – *pricel* и *priceu* – остаются значимыми. Увеличение цены на дорогие сигареты на 1 реальную коп. снижает вероятность начала курения на 0,027, причем для юношей больше – на 0,03, а для девушек меньше – на 0,023. Сравнение с результата-

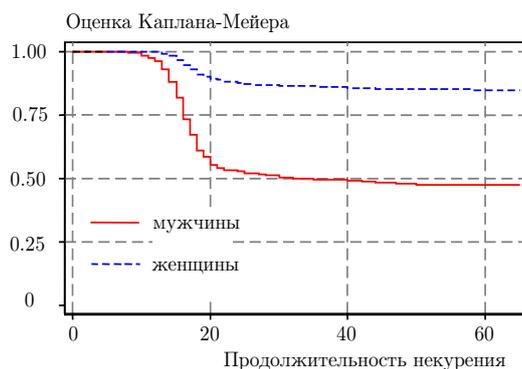


Рис. 7: Оценка функций надежности для прекращения курения по полу, полная выборка

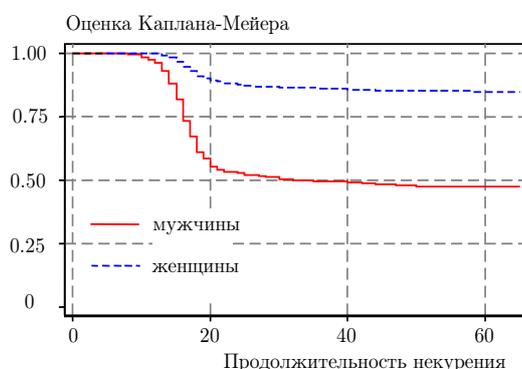


Рис. 8: Оценка функций риска для прекращения курения по полу, полная выборка

ми модели для всей выборки из таблицы 2 показывает, что эластичность ценового фактора для подростков чуть выше, чем для всех индивидов. Увеличение цен на дешевые сигареты повышает риск начала курения в течение короткого промежутка времени в 1,03 раза, что свидетельствует о наличии социальной проблемы – ухудшение уровня жизни при росте реальных цен приводит к распространению вредной привычки курения среди подростков.

## 5 Анализ факторов, влияющих на прекращение курения

Нами оценены функции надежности и риска для продолжительности курения для индивидов, которые курят, с помощью процедуры Каплана–Мейера. На Рис. 7 представлены функция надежности для мужчин и женщин раздельно. На Рис. 8 представлены функции риска раздельно по полу. Функция надежности монотонно убывает, что характерно как для мужчин, так и для женщин. Функция риска для всей выборки колеблется с ярко выраженными двумя локальными максимумами – для продолжительности курения в 10 и 40 лет, что соответствует в среднем возрастам 27 и 57 лет. Отметим различную динамику в функциях риска для мужчин и для женщин. Для женщин функция риска имеет ярко выраженный колебательный характер с пиками в 8, 30 и 45 лет продолжительности курения, и спадами в 23 и 38 лет, причем ее значения практически на всей области определения больше, чем аналога для мужчин. Функции риска для мужчин монотонно возрастает до продолжительности курения в 40 лет, и затем начинается спад. Нами исследована подробно зависимость риска прекращения курения от возраста. В зрелом возрасте (от 31 до 50 лет) пик риска бросить курить для женщин с 9- и 25-летней продолжительностью курения, для мужчин –

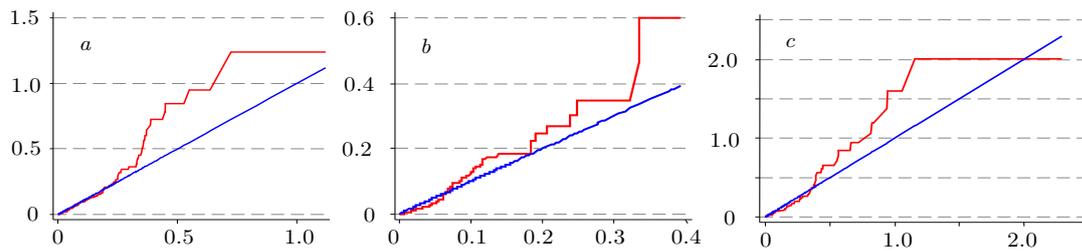


Рис. 9: Кумулятивные ошибки Кокса–Шнелла для модели прекращения курения: полная выборка (а), мужчины (b), женщины (с)

с 24-летней. Для старшего возраста (старше 50 лет) пик риска отказа от курения при 40-летней продолжительности для мужчин и 30- и 45-летней – для женщин. Таким образом, женщины более вероятно бросают курить в возрастах около 24, 30 и 45 лет. В 24 и 30 лет отказ от курения связан с периодом фертильности и рождением первого/второго ребенка, в зрелом возрасте около 45 лет – с физиологическими изменениями организма. Мужчины чаще бросают курить в возрасте около 22 и 41 года. В первом случае – это возраст завершения образования и вступления на рынок труда, а также создания семьи, что способствует пересмотру привычек. В зрелом возрасте мужчины, очевидно, отказываются от табака из-за проблем со здоровьем.

Очевидно, важнейшим фактором, влияющим на решение о прекращении курения, является продолжительность употребления табака, поэтому в состав вектора объясняющих переменных  $X$  включим переменную *durationcat*. Также включены следующие факторы: пол (*female*), лагированная по отношению к периоду отказа от курения самооценка здоровья (*selfhealth*), семейное положение (*marst*), цены (*pricel* и *priceu*), физическая активность (*sport*), профессиональная фиктивная переменная (*prof*), логарифм индивидуального дохода за последний месяц (*lnincome*), фиктивные переменные для учета эффекта когорт и фиктивные переменные для годов проведения опроса РМЭЗ.

В целом выборка содержит индивидов, которые характеризуют уровень своего здоровья как средний (см. таблицу 1) и занимаются физическими упражнениями в среднем меньше 3-х раз в неделю. Среди женщин больше имеющих «офисную» работу, чем среди мужчин. Средняя продолжительность курения индивидов, образующих выборку, равна 19 годам для мужчин и 12 годам для женщин.

Значения логарифмического рангового критерия проверки равенства функций надежности по Каплану–Мейеру для включенных в модель окончания курения переменных позволяют судить о значимой дискриминантной способности всех переменных, за исключением переменной *marst*. В таблице 3 представлены оценки параметров модели пропорциональных рисков Кокса (2) для окончания курения для объединенной выборки и отдельно по полу. Также построена модель отказа от курения, в которой использованы цены Росстата – *pricsegks*. Результаты принципиально не отличаются от представленных в таблице 3, за исключением переменной цены *pricsegks*, имеющей отрицательный знак и являющейся в модели значимой.

Графики кумулятивных ошибок Кокса–Шнелла (Рис. 9) позволяют сделать вывод о том, что модель для женщин имеет не очень хорошие свойства спецификации. Полная модель является удовлетворительно специфицированной. Предсказанная доля бросивших курить видна в нижней части таблицы 3. Для всей выборки она равна 0,03, что не совпадает с фактически наблюдаемым значением 0,07. Однако тестирование гипотезы о пропорциональности рисков на основе взвешенных ошибок Шoenфельда как для модели в целом, так и по переменным дало результаты, показывающие пропорциональность объясняющих переменных. Оценки дисперсии в модели вида (3) позволяют судить о незначимости ненаблюдаемой

Таблица 3: Результаты оценки модели Кокса для прекращения курения

Переменные	Вся выборка	Мужчины	Женщины
Female	0,272 (0,198)	–	–
Selfhealth	0,088 (0,159)	0,279 (0,195)	–0,251 (0,209)
Marst	0,115 (0,173)	–0,114 (0,221)	258 (0,258)
Sport	0,079 (0,069)	0,178** (0,075)	–0,230 (0,176)
Durationcat	–0,626*** (0,108)	–0,671*** (0,147)	–0,659*** (0,183)
Pricel	2,198** (0,762)	1,250 (1,003)	3,156** (1,248)
Priceu	–3,191*** (0,629)	–2,028*** (0,771)	–5,232*** (1,064)
Prof	0,624*** (0,185)	0,609** (0,247)	0,646** (0,283)
Lnincome	–0,022 (0,021)	–0,003 (0,027)	–0,059* (0,033)
30 < Age ≤ 50	0,375* (0,216)	0,703** (0,306)	0,038 (0,354)
Age > 50	1,294*** (0,442)	1,706*** (0,582)	0,990 (0,744)
1995	–0,786 (0,503)	–0,909 (0,569)	–0,372 (1,219)
1996	–1,098** (0,503)	–1,017* (0,623)	–0,684 (0,958)
1998	–0,960** (0,398)	–1,349** (0,541)	0,126 (0,722)
2000	–1,351*** (0,419)	–1,453** (0,579)	–0,726 (0,738)
2001	–1,532*** (0,414)	–2,202*** (0,567)	–0,334 (0,719)
Субъектов	1926	1492	434
Провалов	138	82	56
Лог-правдоподобие	–892,75	–514,97	–273,04
$\chi^2$	163,67	112,66	66,49
Предсказанная доля бросивших	0,03	0,03	0,03
Наблюдаемая доля бросивших	0,07	0,05	0,13

*Замечания:* В таблице даны значения коэффициентов. Используется метод Бреслоу для обработки отказов. Выборка содержит индивидов бросивших курить не ранее 1994 года. Робастные стандартные ошибки (коррекция по группам индивидов) в скобках. Уровни значимости: \* – 10% уровень, \*\* – 5% уровень, \*\*\* – 1% уровень.

гетерогенности.

Результаты моделирования показывают, что положительную эластичность вероятности отказа от курения по цене имеют индивиды, употребляющие дешевые сигареты: при увеличении реальной цены на 1 коп. за пачку дешевых сигарет вероятность бросить курить в течение короткого промежутка времени возрастает на 0,02. В то же время для индивидов с высоким уровнем жизни реакция на повышение цен асимметричная: при повышении реальной цены индивиды реже бросают курить. Этот результат, на первый взгляд, является парадоксальным. В то же время этот факт свидетельствует о том, что для населения с высокими доходами цена сигарет играет второстепенную роль по сравнению с силой привычки к курению. Также, в связи с этой привычкой, текущая цена сигарет, возможно, влияет не столько на прекращение курения, сколько на смещение спроса в направлении более качественных сигарет, что связано с высоким реальным уровнем доходов. Таким образом, эластичность отказа от курения по цене асимметрична по видам сигарет – положительна для индивидов, курящих дешевые сигареты и отрицательна для курящих дорогие.

Реже отказываются от вредной привычки курения богатые женщины. Для мужчин значимо влияет на негативное отношение к курению фактор физической активности, который повышает риск отказа от курения на 19%. Следовательно, одним из способов сокращения курения является пропаганда физической активности и спорта среди населения.

Для работников сферы услуг, специалистов сельского хозяйства, ремесленников и мастеров, рабочих, неквалифицированных рабочих и военнослужащих риск отказа от курения меньше по сравнению с законодателями, топ-менеджерами, чиновниками, офисными служащими, специалистами и техниками. Тяжесть работы, таким образом, оказывает влияние на отказ от вредных привычек, как для мужчин, так и, в меньшей степени, для женщин.

Важнейший фактор, обуславливающий продолжение курения – стаж курения. Этот факт косвенно подтверждает привыкающий характер курения.

Более склонны к отказу от курения лица, родившиеся до 50-х годов прошлого столетия.

В модели значимы фиктивные переменные для годов опроса РМЭЗ – в 2000-х годах риск отказа от курения меньше. В сочетании с увеличением риска начала курения для этого же периода (таблица 2), мы можем сделать вывод о распространении привычки в начале века, что согласуется с результатами описательных статистик выборки: доля курильщиков с 1994 по 2001 год выросла на 3,6%, в том числе в 2000–2001 гг. на 2%.

## 6 Моделирование количества выкуриваемых сигарет для курильщиков

Воспользуемся сформированной панелью по индивидам, которые курили или курят, и для которых известно количество потребляемых ими сигарет.

Согласно данным РМЭЗ, среднее по выборке количество выкуриваемых ежедневно сигарет неуклонно возрастало от 14,52 в 1994 году до 15,69 штук в 2001 году, причем для мужчин рост от 15,75 до 17,31, а для женщин – от 7,96 до 10,20 штук. Прирост для женщин составил почти в 1,5 раза больше, чем для мужчин. Стандартное отклонение количества выкуриваемых сигарет для мужчин несколько больше, чем для женщин (от 7,16 до 8,12 и от 6,04 до 6,13 штук соответственно). Таким образом, можно утверждать, что мужчины курят почти в 2 раза больше женщин. Более 85% курильщиков курят сигареты (с фильтром или без фильтра), причем более 90% женщин курят сигареты с фильтром.

Дополнительно будем использовать переменные: *hours* – средняя продолжительность рабочего дня для работающих, в часах, *age*, *agesq* – соответственно возраст индивида и квадрат возраста, *sort* – вид курева (1 – папиросы, 2 – сигареты с фильтром, 3 – сигареты без фильтра, 4 – самокрутка, 5 – трубка), *empl* – 1 для занятых и 0 для безработных, а также фиктивные переменные для профессиональных и образовательных категорий.

Исследуем зависимость логарифма количества выкуриваемых в день сигарет от факторов,

используя панельную структуру данных и цензурирование выборки для некурильщиков. Строим тобит-модель со случайными эффектами в ошибке (значения статистики отношения правдоподобия удовлетворительны). Результаты моделирования приведены в таблице 4. Поскольку важная для нас переменная *sport* не может быть сконструирована для 1994 года обследования, результаты приведены для двух случаев, в каждом из которых выделены модели для занятых.

Нами получено, что зависимость логарифма количества употребленных сигарет от возраста имеет квадратичную зависимость с точкой экстремума в возрасте около 29 лет, по достижении которого количество выкуренных сигарет начинает снижаться. Меньше курят женщины, а также индивиды, имеющие семью. Профессиональное образование в университете также положительно влияет на сокращение потребления табака.

Переменная употребления спиртного исключена как эндогенная. Физическая активность является сдерживающим фактором для употребления табака, что позволяет еще раз подтвердить вывод о пользе пропаганды здорового образа жизни и занятий физкультурой/упражнениями. Изменение в структуре потребления табачной продукции: увеличение курящих сигареты без фильтра, самокрутки и трубки увеличивает логарифм количества выкуриваемого табака в 1,3 раза. Занятые индивиды курят больше в среднем на 5% по сравнению с безработными, причем количество выкуренного пропорционально «тяжести» работы – количеству отработанных часов в сутки. Что касается наиболее подверженных привычке курения профессиональных категорий, то можно утверждать, что курят больше (по сравнению с техническими специалистами) законодатели, руководители, чиновники, работники сферы услуг, военнослужащие. Изменение цен на дорогие сигареты положительно значимо для логарифма выкуриваемого табака, что подтверждает выводы сделанные в разделах 3 и 4. В спецификации модели с использованием переменной цены по Росстату – *pricegks*, подтверждается отрицательная эластичность количества потребляемого табака по цене. Наконец, 2000–2001 годы курить стали больше, в среднем на 10%.

## 7 Заключение

Мы проанализировали причины, определяющие преодоление индивидами двойного барьера – начало курения и отказ от курения – и получили следующие результаты. Изменившиеся социально-экономические условия привели к широкому распространению привычки курения в начале текущего века. Доля курильщиков с 1994 по 2001 год выросла на 3,6%, в том числе в 2000–2001 гг. на 2%, причем в среднем на 10% увеличилось количество выкуриваемых сигарет. В первые 5 лет после начала курения бросают курить около 35% курильщиков. Расчеты показали, что среди бросивших курить подростков, бросили курить в первые 3 года после начала курения около 90%. Цена является ключевым фактором для начала и отказа от курения. Планируемое правительством введение лицензирования продавцов на табачном рынке неизбежно приведет к «вымыванию» мелких торговых фирм и росту цен на сигареты. Выявлено асимметричное влияние увеличения цен на сигареты по видам сигарет. Повышение цены на дешевые сигареты приводит для некурящей части населения к увеличению вероятности начала курения доступных сигарет из-за падающего уровня жизни и одновременно к большей частоте отказа от курения из-за низкого уровня доходов для курильщиков. Повышение цены на дорогие сигареты способствует снижению вероятности начала курения для некурящего населения и уменьшению частоты отказа от курения для курильщиков. Поскольку для богатых индивидов цена сигарет играет второстепенную роль по сравнению с силой привычки к курению, текущая цена сигарет, возможно, влияет не столько на прекращение курения, сколько на смещение спроса в направлении более качественных сигарет. Таким образом, при регулировании табачного рынка необходимо учитывать неоднородность ценовой эластичности потребления табака. Увеличение цен на дешевые сигареты повышает вероятность начала

Таблица 4: Тобит-регрессия со случайными эффектами для логарифма количества выкуренных сигарет

Переменные	Панель РМЭЗ 1995–2001		Панель РМЭЗ 1994–2001	
	Полная выборка	Для занятых	Полная выборка	Для занятых
Const	–1,096*** (0,097)	–1,132*** (0,120)	–1,118*** (0,106)	–1,086*** (0,109)
Marst	–0,070*** (0,021)	–0,066*** (0,022)	–0,066*** (0,026)	–0,056*** (0,021)
Female	–0,876*** (0,027)	–0,848*** (0,029)	–0,909*** (0,026)	–0,878*** (0,027)
Age	0,016*** (0,006)	0,014** (0,006)	0,021*** (0,005)	0,018*** (0,006)
Agesq	–0,0003*** (0,0001)	–0,0002*** (0,0001)	–0,0003*** (0,0001)	–0,0003*** (0,0001)
Sort	1,339*** (0,010)	1,350*** (0,011)	1,310*** (0,009)	1,325*** (0,009)
Pricel	0,100 (0,062)	0,117 (0,076)	0,130 (0,098)	0,149 (0,101)
Priceu	0,214*** (0,049)	0,194*** (0,053)	0,170*** (0,045)	0,157*** (0,047)
Sport	–0,019** (0,008)	–0,023*** (0,009)	–	–
Hours	–	0,014*** (0,002)	–	0,013*** (0,002)
Empl	0,047* (0,027)	–	0,062** (0,025)	–
Начальное образование	–0,029 (0,031)	–0,037 (0,032)	–0,009 (0,028)	–0,013 (0,029)
ПТУ и среднее образование	0,033 (0,025)	0,042* (0,025)	0,036* (0,022)	0,037 (0,023)
Профессиональное обучение	0,012 (0,028)	–0,018 (0,029)	–0,011 (0,026)	–0,016 (0,027)
Высшее образование	–0,061** (0,033)	–0,068** (0,035)	–0,051* (0,031)	–0,058* (0,032)
Законодатели, топ-менеджеры, чиновники	0,158*** (0,043)	0,198** (0,045)	0,154*** (0,040)	0,191*** (0,042)
Профессионалы	–0,049 (0,039)	–0,032 (0,040)	–0,038 (0,035)	–0,022 (0,037)
Офисные служащие	0,011 (0,052)	0,007 (0,054)	0,030 (0,048)	0,020 (0,050)
Работники сферы услуг	0,168*** (0,040)	0,126*** (0,042)	0,185*** (0,037)	0,164*** (0,039)
Ремесленники и мастера	–0,011 (0,035)	–0,012 (0,037)	0,002 (0,033)	0,033 (0,034)
Рабочие, специалисты и техники	0,031 (0,035)	0,006 (0,037)	0,047 (0,033)	0,028 (0,034)
Неквалифицированные рабочие	0,005 (0,038)	–0,024 (0,039)	0,038 (0,035)	0,019 (0,037)
Военнослужащие	0,232*** (0,079)	0,234*** (0,084)	0,199*** (0,072)	0,178** (0,076)
Лог-правдоподобие	–12229,58	–11016,95	–14874,26	–13370,83
Тест Вальда	22917,65	21216,48	26715,86	24719,67
LR-тест $\sigma_u = 0$	2349,12	1918,32	3080,86	2581,44
Нецензурировано	8484	7652	10277	9236
Цензурировано слева	13518	12006	16677	14772

Замечания: Базисные категории: общее среднее образование, профессиональные специалисты производств. Стандартные ошибки в круглых скобках. Временные эффекты не показаны, но были включены в регрессию. Уровни значимости: \* – 10% уровень, \*\* – 5% уровень, \*\*\* – 1% уровень.

курения среди молодежи в течение короткого промежутка времени почти на 0,03, что свидетельствует о наличии социальной проблемы – ухудшение уровня жизни при росте реальных цен приводит к распространению вредной привычки курения среди подростков. Выявлены отличия в причинах начала курения для женщин и мужчин. Для первых, характерен отказ от курения в периоды фертильности и большая эластичность факторов, связанных с самооценкой здоровья и количественным составом семьи. Для мужчин важен эффект молодого поколения. Более склонны к началу курения горожане, поскольку общественное мнение в сельской местности еще остается влиятельным фактором и препятствует распространению курения, так как считается, что курящие, особенно женщины, нарушают социальные нормы. В то же время в городе общественное мнение относительно вредных привычек демократичнее. Подтверждается эмпирически привыкающий характер потребления сигарет: увеличение количества выкуренных сигарет на 1 штуку сегодня, приводит к росту потребления на 0,04 штуки завтра. Менее склонны к отказу от курения курильщики со стажем. Причем эластичности риска отказа от сигарет по продолжительности курения для женщин и мужчин практически совпадают. Старение является достаточной причиной для сокращения потребления сигарет: получена выпуклая квадратичная зависимость для количества выкуриваемых сигарет от возраста индивида с пиком в возрасте 29 лет, по достижении которого количество выкуренных сигарет начинает снижаться. Результаты нашего исследования позволяют судить о положительном воздействии ограничительных мер законодательного характера, в частности, запрета курения в общественных местах (на работе) и пропаганды вреда курения. Существенно влияет на количество потребляемого табака напряженность работы и профессия. Выявлены возможности сокращения курения путем пропаганды здорового образа жизни, поскольку фактор физической активности сдерживает употребление табака и повышает вероятность отказа от курения.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Консорциума Экономических Исследований и Образования в России и СНГ (EERC Russia & CIS), грант R03-138. Автор благодарит Майкла Бинстока, Рэндалла Файлера и Ирину Денисову за профессиональные советы по выполнению проекта, Анну Лукьянову и Юрия Андриенко за ценные комментарии, и Станислава Анатольева за советы по подготовке статьи.

## Список литературы

- Becker, G.S. & K.M. Murphy (1988). A theory of rational addiction. *Journal of Political Economy* 96, 675–700.
- Becker G.S., M. Grossman & K.M. Murphy (1994). An empirical analysis of cigarette addiction. *American Economic Review* 84, 396–418.
- Beenstock, M. & G. Rahav (2002). Testing gateway theory: The effect of cigarette prices on the consumption of cigarettes and illicit drugs in Israel. *Journal of Health Economics* 21, 679–698.
- Beenstock, M. & G. Rahav (2003). Immunity and susceptibility in illicit drug initiation in Israel. Unpublished manuscript.
- Chaloupka, F.J. & K.E. Warner (1999). The economics of smoking. *Handbook of Health Economics* 1B, 1539–1627, Elsevier: North Holland.
- Cox, D.R. (1972). Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 34, 187–202.
- Cox, D. & D. Oakes (1984). *Analysis of Survival Data*. London: Chapman & Hall.
- Douglas, S.M. (1998). The duration of the smoking habit. *Economic Inquiry* 36, 49–64.

- Evans, W.N. & M.C. Farrelly (1998). The compensating behavior of smokers: taxes, tar and nicotine. *RAND Journal of Economics* 29, 578–595.
- Evans, W.N., M.C. Farrelly & E. Montgomery (1999). Do workplace smoking bans reduce smoking? *American Economic Review* 89, 729–747.
- Forster, M. & A.M. Jones. (2001). The role of tobacco taxes in starting and quitting smoking: Duration analysis of British data. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 164, 517–547.
- Grambsch, P.M. & T.M. Therneau (1994). Proportional hazards tests and diagnostics based on weighted residuals. *Biometrika* 81, 515–526.
- Greene, W.A. (2000). *Econometric Analysis*. New York: Macmillan.
- Heckman, J. & B. Singer (1984). Econometric duration analysis. *Journal of Econometrics* 24, 63–132.
- Jenkins, S.P. (1997). Discrete time proportional hazards regression (pgmhaz). In: H.J. Newton, ed., *Stata Technical Bulletin Reprints* 7, 109–121. College Station TX: Stata Corporation.
- Jenkins, S.P. (2004). Survival analysis. Draft lecture notes & Introduction to the analysis of spell duration data. Institute for Social and Economic Research, University of Essex.
- Jones, A.M. (1989). A double-hurdle model of cigarette consumption. *Journal of Applied Econometrics* 4, 23–39.
- Kiefer, N.M. (1988). Economic duration data and hazard functions. *Journal of Economic Literature* 26, 646–679.
- Klein, J.P. & M.L. Moeschberger (1997). *Survival Analysis*. New York: Springer-Verlag.
- Labeaga, J.M. (1999). A double-hurdle rational addiction model with heterogeneity: Estimating the demand for tobacco. *Journal of Econometrics* 93, 49–72.
- Lancaster T. (1990). *The Econometric Analysis of Transition Data*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lin, D.Y. & L.J. Wei (1989). The robust inference for the Cox proportional hazards model. *Journal of the American Statistical Association* 84, 1074–1078.
- Sander, W. (1995). Schooling and quitting smoking. *Review of Economics and Statistics* 129, 191–198.
- Suranovic, S.M., R.S. Goldfarb & T.C. Leonard (1999). An economic theory of cigarette addiction. *Journal of Health Economics* 18, 1–29.
- Tauras, J.A. (1999). The transition to smoking cessation: Evidence from multiple failure duration analysis. NBER Working Paper No. 7412.
- Tauras, J.A., P.M. O'Malley & L.D. Johnston (2001). Effects of price and access laws on teenage smoking initiation: A national longitudinal analysis. NBER Working Paper No. 8331.

## Socioeconomic determinants of smoking in Russia

Sergey Arzhenovsky

*Rostov State Economic University, Rostov-on-Don, Russia*

We study factors impacting the initiation and termination of smoking as well as its “heaviness” on the basis of RLMS data. An asymmetric influence of cigarette prices is revealed, and an addictive character of tobacco consumption is confirmed. We find that it is possible to reduce smoking by popularization of a healthy lifestyle.

*Keywords:* Russia, smoking, duration analysis, hazard model

*JEL Classification:* C41, D12, I12.

# Моделирование волатильности со скачками: применение к российскому и американскому фондовым рынкам\*

Сергей Белоусов<sup>†</sup>

*Альфа-Банк, Москва, Россия*

Хорошо известно, что доходности финансовых активов характеризуются условной гетероскедастичностью, а само распределение доходностей – тяжелыми хвостами. Кроме того, отличительной особенностью современных финансовых рынков является наличие скачкообразной динамики цен активов. Одна из наиболее популярных моделей, описывающих подобное поведение, – GARCH–J, в которой скачки доходностей описываются распределением Пуассона. В данной работе мы предлагаем новую спецификацию модели, GARCH–TJI, в которой интенсивность скачков зависит от абсолютного значения доходности в предыдущий период, и превышает ли оно некоторый порог. Сравнительный анализ демонстрирует большую эффективность GARCH–TJI-модели, чем у описанной в литературе модели GARCH–ARJI.

*Ключевые слова: финансовые доходности, условная гетероскедастичность, интенсивность скачков*

*Классификация JEL: C22, G12, G15.*

## 1 Введение

В настоящее время общепризнанно, что доходности финансовых активов характеризуются условной гетероскедастичностью, а само распределение доходностей – тяжелыми хвостами. Предложено довольно много моделей, описывающих подобное поведение. Авторегрессионная модель условной гетероскедастичности (ARCH), предложенная в Engle (1982) и позже обобщенная (GARCH) в Bollerslev (1986), является наиболее широко используемой. Модель подразумевает серийную корреляцию второго момента распределения доходностей и кластеризацию волатильности и удачно описывает «гладкие» изменения волатильности. Однако в рамках данного подхода не представляется возможным описать и объяснить резкие и значительные изменения цен, в то время как в действительности отличительной особенностью современных финансовых рынков является именно скачкообразное поведение цен (Jorion, 1988; Bates, 1991).

Традиционно наличие скачков в поведении цен объясняют изменяющимся новостным фоном на рынке. Например, информация, разрешающая неопределенность относительно будущих финансовых результатов какой-либо компании (скажем, новости о выплате дивидендов), может привести к существенному изменению текущих рыночных цен акций этой компании. Согласно данному подходу, наиболее важным фактором, влияющим на динамику цен, является процесс появления новостей на рынке. В работах Tauchen & Pitts (1983), Gallant, Rossi & Tauchen (1992) и Andersen (1996) волатильность доходностей напрямую зависит от интенсивности поступления новостей на рынок. В предложенных моделях интенсивность поступления информации описывается авторегрессионным процессом первого порядка (AR(1)),

\*Цитировать как: Белоусов, Сергей (2006) «Моделирование волатильности со скачками: применение к российскому и американскому фондовым рынкам», Квантиль, №1, стр. 101–110. Citation: Belousov, Sergey (2006) “Volatility modeling with jumps: applications to Russian and American stock markets,” Quantile, No.1, pp. 101–110.

<sup>†</sup>Адрес: 107005, Москва, проспект Академика Сахарова, 12. Электронная почта: [SSBelousov@alfabank.ru](mailto:SSBelousov@alfabank.ru)

а получающаяся при этом динамика волатильности имеет тенденцию к кластеризации. Однако, существенным недостатком этих моделей является их неспособность объяснить резкие изменения цен и наличие «тяжелых хвостов» в доходностях. В эконометрической литературе было предложено много подходов для разрешения этих проблем. Например, нормальное распределение может быть заменено распределением с «тяжелыми хвостами», например, распределением Стьюдента. Другие альтернативы включают модель Пуассоновских скачков (Press, 1967), где процесс появления резких скачкообразных доходностей описывается Пуассоновским распределением. Данный подход более привлекателен с точки зрения финансовой теории, поскольку позволяет изучать саму природу волатильности.

Модель Пуассоновских скачков в дальнейшем была расширена по ряду направлений. Так, оказалось возможным объединить ее с ARCH/GARCH-моделями в дискретном времени. В этом случае GARCH-модель описывает «гладкие» изменения волатильности, а скачки отвечают за появление нечастых, но значительных доходностей актива.

Общей особенностью первых GARCH-J-моделей являлось предположение о неизменном во времени Пуассоновском распределении (иными словами, интенсивность скачков являлась константой). Однако, кажется логичным, что вероятность скачков может изменяться во времени. Являлась ли вероятность скачка до кризиса 1998 года такой же, как и в другие периоды? Ответ: нет. Chan & Maheu (2002), Maheu & McCurdy (2004) расширили GARCH-J-класс моделей, чтобы позволить распределению скачков изменяться во времени. В предложенной ими спецификации GARCH-ARJI интенсивность скачков описывается авторегрессионным процессом. Это позволяет объяснить кластеризацию скачков во времени. Оценивание этой модели, однако, требует построения сильно нелинейной функции правдоподобия, численная максимизация которой может столкнуться с определенными проблемами.

В данной статье мы рассмотрим модели Chan & Maheu (2002); затем предложим и оценим новую спецификацию GARCH-TJI, в которой интенсивность скачков нелинейным образом зависит от абсолютного значения доходности актива в предыдущий период времени, и превышает ли оно некоторый порог. В работе используются данные о ценах акций и индексов с фондовых бирж ММББ, РТС и NYSE. Полученные результаты свидетельствуют о наличии скачков на российском фондовом рынке. При этом предложенная нами спецификация GARCH-TJI показывает лучшие результаты по сравнению с моделью GARCH-ARJI для российских акций, в то время как для американского рынка результаты эквивалентны.

## 2 Модель GARCH-ARJI

В данном разделе мы опишем GARCH-J-модель, предложенную Chan & Maheu (2002), с изменяющейся во времени интенсивностью скачков. В этой модели ненаблюдаемый процесс поступления новой информации влияет на поведение цен. Поток новостей имеет две компоненты: новости, не приводящие к скачкообразному изменению цен, и новости, появление которых на рынке приводит к скачкам в ценах:  $r_t = \mu + \sqrt{h_t} \cdot z_t + J_t$ ,  $z_t \sim N(0, 1)$ . Здесь  $J_t$  – компонента, отвечающая за скачки. Поведение скачков описывается распределением Пуассона с изменяющейся во времени интенсивностью скачков. Так, распределение Пуассона с параметром  $\lambda_t$ , условное на информационное множество  $\Phi_{t-1}$ , описывает реализацию дискретного числа скачков  $n_t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , на временном интервале  $(t-1, t]$ . Условная плотность числа скачков  $n_t$  выглядит следующим образом:

$$P(n_t = j | \Phi_{t-1}) = \frac{\exp(-\lambda_t) \lambda_t^j}{j!} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Известно, что математическое ожидание случайной величины, распределенной согласно распределению Пуассона, равно интенсивности процесса. Таким образом, условная интенсивность скачков  $\lambda_t \equiv \mathbb{E}[n_t | \Phi_{t-1}]$  равна математическому ожиданию числа скачков, условному

на информационном множестве  $\Phi_{t-1}$ . В свою очередь, динамика интенсивности скачков  $\lambda_t$  ведет себя следующим образом:

$$\lambda_t = \lambda_0 + \rho\lambda_{t-1} + \gamma\xi_{t-1}.$$

Данная параметризация представляет собой модель авторегрессионной условной интенсивности скачков (ARJI). Условная интенсивность скачков  $\lambda_t$  здесь имеет авторегрессионный характер и зависит от интенсивности в предыдущий момент времени и остатка  $\xi_{t-1}$ . Заметим, что если  $\rho = \gamma = 0$ , то мы получим модель с постоянной интенсивностью скачков. Остаток  $\xi_{t-1}$  определяется как

$$\xi_{t-1} \equiv \mathbb{E}[n_{t-1} | \Phi_{t-1}] - \lambda_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} j \Pr(n_{t-1} = j | \Phi_{t-1}) - \lambda_{t-1},$$

где  $\mathbb{E}[n_{t-1} | \Phi_{t-1}]$  есть наша *ex post*-оценка ожидаемого числа скачков, которые произошли в период  $(t-2, t-1]$ , в то время как  $\lambda_{t-1}$  по определению равна математическому ожиданию числа скачков  $n_{t-1}$ , условному на информационном множестве  $\Phi_{t-2}$ . Таким образом,  $\xi_{t-1}$  представляет собой изменение в условном прогнозе числа скачков  $n_{t-1}$  по мере того, как расширяется наше доступное информационное множество:

$$\xi_{t-1} = \mathbb{E}[n_{t-1} | \Phi_{t-1}] - \mathbb{E}[n_{t-1} | \Phi_{t-2}].$$

Заметим также, что из данного представления следует, что остаток  $\xi_t$  есть последовательность мартингалных приращений по отношению к информационному множеству  $\Phi_{t-1}$ :

$$\mathbb{E}[\xi_t | \Phi_{t-1}] = 0.$$

Следовательно, ряд остатков  $\xi_t$  в удачно подобранной модели не должен обладать значимой автокорреляцией. Компонента  $J_t$ , отвечающая за скачки, равна

$$J_t = \sum_{k=1}^{n_t} Y_{t,k} - \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{n_t} Y_{t,k} | \Phi_{t-1} \right],$$

где размер скачка  $Y_{t,k}$  распределен нормально:  $Y_{t,k} \sim NID(\theta, \delta^2)$ . Следовательно, скачковая компонента может быть записана как

$$J_t = \sum_{k=1}^{n_t} Y_{t,k} - \theta\lambda_t.$$

Условная дисперсия доходностей также имеет две компоненты: компонента, отвечающая за «гладкие» постепенные изменения волатильности, и скачковая компонента. Условная дисперсия доходностей равна

$$\mathbb{V}[r_{t-1} | \Phi_{t-1}] = h_t + \mathbb{V}[J_t | \Phi_{t-1}].$$

Первая часть условной дисперсии,  $h_t$ , описывается GARCH-классом функций

$$h_t = \omega + g(\Lambda, \Phi_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}, \quad \varepsilon_{t-1} = r_{t-1} - \mu,$$

где  $g(\cdot)$  параметризуется так, чтобы учесть возможные асимметричные эффекты «хороших» и «плохих» новостей на волатильность. Условная дисперсия скачковой компоненты равна

$$\mathbb{V}[J_t | \Phi_{t-1}] = \mathbb{E}[n_t | \Phi_{t-1}] \delta^2 = \lambda_t \delta^2.$$

Вклад этой компоненты в общую волатильность будет изменяться во времени, по мере того как будет изменяться интенсивность скачков  $\lambda_t$ .

Перейдем теперь к описанию функции правдоподобия, которую необходимо максимизировать в процессе оценивания модели. При условии реализации числа скачков  $j$ , условная плотность доходностей является нормальной:

$$f(r_t | n_t = j, \Phi_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(h_t + j\delta^2)}} \exp\left(-\frac{(r_t - \mu + \theta\lambda_t - \theta j)^2}{2(h_t + j\delta^2)}\right).$$

Тогда условная плотность равна

$$f(r_t | \Phi_{t-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} f(r_t | n_t = j, \Phi_{t-1}) \mathbf{Pr}(n_t = j | \Phi_{t-1}).$$

Теоретически в этом случае необходимо производить бесконечное суммирование. Однако для того чтобы иметь возможность оценивать данную модель, на практике обычно ограничиваются каким-то максимальным числом скачков, после увеличения которого результаты оценивания существенно не меняются (в нашем случае мы ограничивались 25 скачками). Функция лог-правдоподобия представляет собой сумму условных лог-плотностей:

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \ln f(r_t | \Phi_{t-1}),$$

максимизация которой производится с помощью численных методов.

Оценивание GARCH-ARJI-модели требует построения так называемого фильтра

$$\mathbf{Pr}(n_t = j | \Phi_t) = \frac{f(r_t | n_t = j, \Phi_{t-1}) \mathbf{Pr}(n_t = j | \Phi_{t-1})}{f(r_t | \Phi_{t-1})}.$$

Данный фильтр впоследствии может использоваться для оценивания вероятностей реализации того или иного числа скачков. Например, *ex post*-оценка вероятности как минимум одного скачка равна

$$\mathbf{Pr}(n_t \geq 1 | \Phi_t) = 1 - \mathbf{Pr}(n_t = 0 | \Phi_t).$$

### 3 Модель GARCH-TJI

В этом разделе мы предложим новую спецификацию GARCH-J-модели, которую мы назовем GARCH-TJI, от *Threshold Jump Intensity*. Как и в GARCH-ARJI-модели, доходность актива есть сумма двух стохастических компонент, «нормальной» и скачковой инноваций:  $r_t = \mu + \sqrt{h_t} \cdot z_t + J_t$ ,  $z_t \sim N(0, 1)$ .

Скачковая компонента равна

$$J_t = \sum_{k=1}^{n_t} Y_{t,k} - \theta\lambda_t.$$

Число скачков, как и ранее, также распределено согласно распределению Пуассона с изменяющейся во времени интенсивностью:

$$\mathbf{Pr}(n_t = j | \Phi_{t-1}) = \frac{\exp(-\lambda_t) \lambda_t^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Однако интенсивность скачков зависит от доходности актива в предыдущий момент времени:

$$\lambda_t = \lambda_0 + \phi \cdot (|r_{t-1} - \mu| - \psi) \cdot \mathbb{I}[(|r_{t-1} - \mu| - \psi > 0)].$$

Таблица 1: Описательные статистики для дневных доходностей акций американских компаний и американских индексов

	GM	IBM	Intel	DJIA	NASDAQ	S&P500
Наблюдений	7641	6379	4732	11394	4926	13905
Среднее	0,044	0,068	0,090	0,024	0,052	0,031
Стандартное отклонение	1,808	1,855	2,914	0,963	1,851	0,902
Скошенность	-0,266	-0,370	-0,437	-1,691	-0,090	-1,334
Эксцесс	9,97	15,85	9,04	51,89	9,61	38,17
Эксцесс*	6,45	9,44	8,55	8,73	8,63	8,93
Минимум	-23,56	-26,92	-24,87	-25,63	-16,35	-22,90
Максимум	13,59	12,36	23,53	9,67	17,20	8,71

Замечания: \* – без учета «черного понедельника» 19 октября 1987 г.

Таким образом, если абсолютное значение доходности в предыдущий период времени превышает некий порог  $\psi$ , интенсивность скачков растет. Данная спецификация выглядит более интуитивной по сравнению с GARCH-ARJI, так как в нашем случае интенсивность скачков зависит от абсолютной доходности, которая является приближением оценки волатильности, что помимо прочего объясняет тенденцию кластеризации скачков во времени. Кроме того, данная спецификация имеет преимущество при оценивании, т.к. здесь нет необходимости в построении фильтра.

#### 4 Описание данных

Оценивание моделей производилось на американских и российских данных. В качестве американских данных использовались ежедневные цены закрытия акций General Motors, IBM, Intel и фондовых индексов DJIA и S&P500. Период оценивания моделей заканчивается в марте 2005 г. В качестве российских данных использовались ежедневные цены закрытия акций РАО ЕЭС, Лукойла, Ростелекома, Сбербанк и СургутНГ (Сургутнефтегаза). Период оценивания включает 4 года наблюдений: с февраля 2001 г. по март 2005 г. Описательные статистики для используемых выборок представлены в таблицах 1 и 2. Видно, что распределение ежедневных доходностей российских и американских акций не является нормальным: так, эксцесс значительно превышает 3. Эксцесс снизится, если исключить из периода оценки так называемый «черный понедельник», день обвала американского фондового рынка (27 октября 1987 г.). Однако, и в этом случае эксцесс превышает значение 3, что указывает на наличие у распределения «толстых хвостов».

#### 5 Результаты оценивания

В данном разделе мы опишем основные результаты оценивания. В таблице 3 представлены оценки GARCH-ARJI-модели для американских данных. Как можно заметить, волатильность американских акций и индексов обладает высоким постоянством, так как сумма GARCH-коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  близка к единице – отличительная особенность финансовых рядов. Также в доходностях присутствует эффект рычага, так как оценки  $\gamma$  положительны. Все оценки параметров интенсивности статистически высокосignификантны. Кроме того, хорошо видно, что интенсивность также обладает высоким постоянством, что указывает на тенденцию к кластеризации скачков во времени. Скачки на американском фондовом рынке главным образом связаны с отрицательными движениями в ценах, поскольку оценки параметра  $\theta$  являются либо отрицательными, либо незначимыми. Размер скачков (стандартное отклонение

Таблица 2: Описательные статистики для дневных доходностей акций российских компаний

	РАО ЕЭС	Ростелеком	СургутНИГ	Лукойл	Сбербанк	РТС
Наблюдений	1247	1247	1247	1247	1247	1247
Среднее	0,040	-0,030	0,082	0,069	0,200	0,092
Стандартное отклонение	3,167	2,998	3,051	2,589	2,722	2,151
Скошенность	-0,039	-0,074	-0,163	-0,449	-0,240	-0,501
Экссесс	4,97	5,13	6,44	7,19	8,31	6,04
Минимум	-14,83	-11,53	-15,75	-16,56	-18,66	-11,53
Максимум	12,54	16,58	16,99	12,85	12,49	9,62

Таблица 3: Результаты оценки модели GARCH-ARJI для американских данных

	GM	IBM	Intel	DJIA	S&P500
$\mu$	0,040	0,056	0,100	0,025	0,034
$\omega$	0,007	0,009	0,047	0,005	0,005
$\alpha$	0,009	0,013	0,012	0,018	0,021
$\beta$	0,977	0,970	0,968	0,946	0,930
$\gamma$	0,008	0,009	0,010	0,048	0,068
$\lambda_0$	0,030	0,031	0,015	0,005	0,020
$\rho$	0,876	0,659	0,840	0,769	0,289
$\kappa$	0,409	0,223	0,445	0,351	0,486
$\theta$	0,118*	0,310*	-1,338	-0,642	-0,500
$\delta$	2,053	3,325	4,590	2,112	1,695
$Q(20)$	29,28	20,01	35,09	41,79**	20,32

Замечания:  $Q(20)$  – статистика Льюнга–Бокса с 20-ю лагами, \* – незначимые на уровне 5%, \*\* – значимые на уровне 5%

скачковой компоненты) является наиболее высоким для Intel (4,590%) и самым низким для S&P500 (1,695%). Отметим хорошую спецификацию модели: тест Льюнга–Бокса отвергает наличие автокорреляции в остатках процесса интенсивности только для DJIA.

Результаты оценивания модели для российских данных (таблица 4) не так высоко значимы, особенно для параметров интенсивности. Тем не менее, стабильность интенсивности скачков и волатильность довольно высоки. Скачки в основном сопровождаются падением цены актива, при этом размер скачка близок к 2%. Несмотря на то, что много параметров незначимо, статистика Льюнга–Бокса отвергает модель только для Ростелекома.

В таблице 5 представлены результаты оценивания GARCH-TJI-модели на американских данных. Заметим, что эти результаты почти такие же, как и для GARCH-ARJI-модели. Однако почти все оценки являются значимыми для российских данных (таблица 6). Согласно этим оценкам, акция, скачки в поведении которой встречаются наиболее часто, – это Сбербанк (порог 0.59%). Эти скачки, однако, не столь неприятны для инвесторов (предполагая, что они в длинной позиции), так как в среднем они являются положительными (по знаку).

В таблице 7 представлена статистика условной интенсивности и волатильности скачков. Хорошо видно, что скачки имеют тенденцию реализовываться раз в два дня, так как средняя интенсивность близка к 0,5. Скачки объясняют большую часть волатильности, от 37% для Лукойла до 93% для Сбербанка. В таблице 8 представлены результаты внутривыборочного

Таблица 4: Результаты оценки модели GARCH-ARJI для российских данных

	РАО ЕЭС	Ростелеком	СургутНГ	Лукойл	Сбербанк	РТС
$\mu$	0,076*	0,0737*	0,069*	0,080*	0,251*	0,125
$\omega$	0,021	0,000*	0,222	0,045	0,021*	0,076
$\alpha$	0,008	0,000*	0,034*	0,025	0,000*	0,081
$\beta$	0,915	0,990	0,850	0,956	0,979	0,912
$\gamma$	0,073	0,006*	0,034*	-0,016*	-0,002*	-0,085
$\lambda_0$	0,044	0,049	0,097*	0,067	0,052*	0,078
$\rho$	0,931	0,941	0,865	0,882	0,949	0,869
$\kappa$	0,243*	0,738	0,673*	1,077	0,321*	1,361
$\theta$	-0,001*	-0,448	-0,222*	-0,794	0,106*	-0,678
$\delta$	2,556	2,365	2,419	2,163	2,769	2,424
$Q(20)$	28,88	39,12**	16,50	29,39	20,71	36,80

Замечания:  $Q(20)$  – статистика Льюнга–Бокса с 20-ю лагами, \* – незначимые на уровне 5%, \*\* – значимые на уровне 5%

Таблица 5: Результаты оценки модели GARCH-TJI для американских данных

	GM	IBM	Intel	DJIA	S&P500
$\mu$	0,044	0,063	0,102	0,025	0,034
$\omega$	0,006	0,011	0,073	0,005	0,005
$\alpha$	0,016	0,016	0,016	0,022	0,023
$\beta$	0,965	0,964	0,952	0,940	0,927
$\gamma$	0,016	0,012	0,026	0,053	0,071
$\lambda_0$	0,160	0,074	0,027	0,016	0,024
$\phi$	0,208	0,094	0,015	0,584*	0,232
$\psi$	2,718	2,696	3,417	3,700	2,015
$\theta$	0,229*	0,459	-1,804	-0,507	-0,499
$\delta$	2,107	3,374	6,431	2,164	1,679

Замечания: \* – незначимые на уровне 5%

Таблица 6: Результаты оценки модели GARCH-TJI для российских данных

	РАО ЕЭС	Ростелеком	СургутНГ	Лукойл	Сбербанк	РТС
$\mu$	0,059*	0,048*	0,058*	0,123*	0,212	0,104
$\omega$	0,008*	0,154	0,215	0,168	0,135	-0,002
$\alpha$	0,024	0,048	0,063	0,063	0,033	0,096
$\beta$	0,896	0,882	0,767	0,877	0,818	0,865
$\gamma$	0,076	0,060	0,086	0,025*	0,075	-0,022*
$\lambda_0$	0,427	0,614	0,570	0,549	0,212	0,405
$\phi$	0,836	0,730	1,254	0,261	0,101	0,505
$\psi$	8,470	2,796	6,441	3,769	0,591	3,080
$\theta$	0,099*	-0,182*	0,025*	-4,234	0,267*	-0,443
$\delta$	2,924	5,758	2,448	2,351	3,062	2,243

Замечания:  $Q(20)$  – статистика Льюнга–Бокса с 20-ю лагами, \* – незначимые на уровне 5%, \*\* – значимые на уровне 5%

Таблица 7: Описательная статистика условной интенсивности и волатильности скачков

	РАО ЕЭС	Ростелеком	СургутНГ	Лукойл	Сбербанк	РТС
$\lambda_t$	0,628	0,876	0,717	0,575	0,954	0,653
$E[n_t   \Phi_t]$	0,630	0,880	0,717	0,576	0,877	0,658
$V[r_t   \Phi_{t-1}]$	9,797	8,627	8,939	6,141	12,57	8,213
$V[J_t   \Phi_{t-1}]$	0,483	0,506	0,476	0,369	0,928	0,396
$V[r_t   \Phi_{t-1}]$	4,336	5,139	4,041	5,221	11,76	4,418

Замечания:  $\kappa_z$  обозначает эксцесс стандартизованных остатков

Таблица 8: Результаты анализа стоимости под риском

	РАО ЕЭС	Лукойл	Ростелеком	СургутНГ	Сбербанк	РТС
TARCH						
VaR 95%	4,72%	4,48%	3,87%	4,00%	3,15%	5,33%
	(-0,36)	(-0,69)	(-1,48)	(-1,33)	(-2,44)	(0,43)
VaR 99%	0,97%	0,85%	0,97%	0,73%	1,21%	1,69%
	(-0,09)	(-0,44)	(-0,09)	(-0,79)	(0,61)	(2,01)
GARCH-ARJI						
VaR 95%	4.60%	5.33%	4.60%	4,12%	4.00%	3.87%
	(-0.53)	(0.43)	(-0.53)	(-1.17)	(-1.33)	(-1.48)
VaR 99%	1.09%	0.85%	1.21%	0.61%	1.33%	1.09%
	(0.26)	(-0,44)	(0.61)	(-1.14)	(0.96)	(0.26)
GARCH-TJI						
VaR 95%	4.84%	5.33%	4.60%	4.12%	4.00%	5,33%
	(-0.21)	(0.43)	(-0.53)	(-1.17)	(-1.33)	(0,43)
VaR 99%	0,97%	0,85%	1.09%	0.61%	1.45%	1.09%
	(-0,09)	(-0,44)	(0.26)	(-1.14)	(1.31)	(0.26)

Замечания: t-статистики в круглых скобках.

Таблица 9: «Черный понедельник», октябрь 1987 г.

Дата	Доходность	<i>ex ante</i> вероятность скачка			<i>ex post</i> вероятность скачка		
		J	ARJI	TJI	J	ARJI	TJI
12 октября	-0,435%	0,014	0,108	0,016	0,007	0,063	0,009
13 октября	1,475%	0,014	0,073	0,016	0,009	0,050	0,011
14 октября	-3,880%	0,014	0,053	0,016	0,247	0,642	0,269
15 октября	-2,417%	0,014	0,230	0,127	0,019	0,347	0,178
16 октября	-4,710%	0,014	0,223	0,016	0,114	0,811	0,123
19 октября	-25,632%	0,014	0,364	0,462	1,000	1,000	1,000
20 октября	5,715%	0,014	0,850	1,000	0,013	0,825	1,000
21 октября	9,666%	0,014	0,757	0,692	0,013	0,726	0,671
22 октября	-3,893%	0,014	0,651	0,969	0,014	0,659	0,971
23 октября	0,017%	0,014	0,559	0,133	0,013	0,542	0,127

Таблица 10: Арест Михаила Ходорковского, 25 октября 2003 г.

Дата	Доходность	<i>ex ante</i> вероятность скачка			<i>ex post</i> вероятность скачка		
		J	ARJI	TJI	J	ARJI	TJI
20 октября	0,059%	0,304	0,117	0,333	0,177	0,065	0,191
21 октября	-3,605%	0,304	0,105	0,333	0,942	0,455	0,962
22 октября	-4,078%	0,304	0,495	0,530	0,666	0,975	0,961
23 октября	-1,143%	0,304	0,819	0,634	0,258	0,881	0,585
24 октября	1,172%	0,304	0,789	0,333	0,222	0,585	0,228
27 октября	-10,062%	0,304	0,497	0,333	1,000	1,000	1,000
28 октября	4,934%	0,304	0,963	0,986	0,281	0,976	0,977
29 октября	-3,701%	0,304	0,917	0,707	0,310	0,998	0,751
30 октября	-8,140%	0,304	0,942	0,554	0,434	1,000	0,848
31 октября	1,905%	0,304	0,989	0,959	0,277	0,973	0,940
3 ноября	6,327%	0,304	0,954	0,333	0,292	0,986	0,344
4 ноября	2,455%	0,304	0,929	0,850	0,274	0,859	0,807
5 ноября	-1,941%	0,304	0,814	0,333	0,288	0,852	0,317

сравнительного анализа на основе показателя стоимости под риском (VaR, value-at-risk). Здесь мы сравниваем эффективность простой пороговой GARCH-модели (TARCH) с двумя спецификациями GARCH-J. Как видим, TARCH-спецификация отвергается для Сбербанка и индекса РТС, в то время как модели GARCH-J дают точные оценки стоимости под риском, с немного более лучшими результатами для GARCH-TJI-модели.

GARCH-J-модели могут использоваться не только для прогнозирования волатильности, но также и для прогнозирования реализации заданного числа скачков. В таблице 9 мы рассмотрим так называемый «черный понедельник» американского фондового рынка, который произошел 19 октября 1987 г. В этот день большинство американских акций испытали самые крупные падения в своей истории. *Ex ante*-вероятность по крайней мере одного скачка в тот день была довольно высока, что указывает на то, что скачок мог быть предсказан (хотя, конечно, не настолько огромный). Как бы то ни было, далеко не все скачки могут быть предсказаны. В таблице 10 видно, что за день до ареста Михаила Ходорковского 25 октября 2003 г. (суббота), вероятность скачка была низкой, что свидетельствует о том, что скачок в следующий рабочий день не мог быть предсказан.

## 6 Заключение

В данной статье с помощью GARCH-J-моделей мы исследовали наличие скачков в поведении цен американских и российских акций. В работе была предложена новая GARCH-TJI-спецификация GARCH-J-модели, в которой интенсивность скачков положительно зависит от абсолютного значения доходности в предыдущий период, и превышает ли оно некоторый порог. Эта параметризация является более интуитивной и менее сложной в оценивании по сравнению с моделью GARCH-ARJI из Chan & Maheu (2002). Кроме того, на основе анализа стоимости под риском была продемонстрирована сравнительная эффективность предложенной GARCH-TJI-модели для российских акций.

## Список литературы

- Andersen, T.G. (1996). Return volatility and trading volume: An information flow interpretation of stochastic volatility. *Journal of Finance* 51, 169–204.

- Andersen, T.G., L. Benzoni & J. Lund (2002). An empirical investigation of continuous-time equity return models. *Journal of Finance* 62, 1239–1284.
- Baba, T., R. Engle, D. Kraft & K. Kroner (1989). Multivariate simultaneous generalized ARCH. Manuscript, UCSD, Department of Economics.
- Ball, C.A. & W.N. Torous (1983). A simplified jump process for common stock returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18, 53–65.
- Bates, D.S. (1991). The crash of '87: Was it expected? The evidence from the options markets. *Journal of Finance* 46, 1009–1044.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 309–328.
- Chan, W.H. (2003). A correlated bivariate poisson jump model for foreign exchange. *Empirical Economics* 28, 669–689.
- Chan, W.H. & J.M. Maheu (2002). Conditional jump dynamics in stock market returns. *Journal of Business & Economic Statistics* 20, 377–389.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the UK inflation. *Econometrica* 50, 987–1008.
- Engle, R.F. (2002). Dynamic conditional correlation – a simple class of multivariate GARCH models. *Journal of Business & Economic Statistics* 20, 339–350.
- Gallant, R. A., P.E. Rossi & G. Tauchen (1992). Stock prices and volume. *Review of Financial Studies* 5, 199–242.
- Jorion, P. (1988). On jump processes in the foreign exchange and stock markets. *Review of Financial Studies* 1, 427–445.
- Maheu, J.M. & T.H. McCurdy (2004). News arrival, jump dynamics, and volatility components for individual stock returns. *Journal of Finance* 59, 755–793.
- Press, S. J. (1967). A compound events model for security prices. *Journal of Business* 40, 317–335.
- Tauchen, G.E. & M. Pitts (1983). The price variability-volume relationship on speculative markets. *Econometrica* 51, 485–505.

## Volatility modeling with jumps: applications to Russian and American stock markets

Sergey Belousov

*Alfa-Bank, Moscow, Russia*

It is well known that stock returns exhibit conditional heteroskedasticity, and their distribution displays leptokurtosis. Moreover, modern financial markets are characterized by large discrete changes in asset returns. One of the most popular models describing this behavior is the GARCH–J(ump) model, where the arrival of jumps is governed by a Poisson distribution. In this paper we propose a new specification called GARCH–TJI, where the jump intensity depends on the absolute lagged return and whether it exceeds some threshold. The comparative analysis demonstrates a higher effectiveness of the GARCH–TJI model than of the GARCH–ARJI specification described in the literature.

*Keywords:* stock returns, conditional heteroskedasticity, jump intensity

*JEL Classification:* C22, G12, G15.

# Quantile

***Nº1, September 2006***

*English page in the world wide web: <http://quantile.ru/eng>*

*Electronic mail address: [quantile@quantile.ru](mailto:quantile@quantile.ru)*

*Access to the journal is free and unlimited*

*Subscription service: [subscribe@quantile.ru](mailto:subscribe@quantile.ru)*

## **EDITOR**

Stanislav Anatolyev

New Economic School (Moscow, Russia)

## **EDITORIAL COUNSEL**

Victoria Zinde-Walsh

McGill University (Montréal, Canada)

Rustam Ibragimov

Harvard University (Cambridge, USA)

Alexey Onatsky

Columbia University (New York, USA)

Vladimir Pavlov

Queensland University of Technology (Brisbane, Australia)

Konstantin Tyurin

Indiana University (Bloomington, USA)

Alexander Tsyplakov

Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russia)

## **GUIDE TO AUTHORS**

Manuscripts for publication in the “Articles” section should be submitted by electronic mail to the address [submit@quantile.ru](mailto:submit@quantile.ru). Submitted work may be drawn from any applied field within the economics profession. The main requirement is correct usage of adequate econometric methodology. The manuscript should be written in Russian (for Russian-speaking persons) or in English (for all others) in the *Microsoft Word* or (preferably) *LaTeX* formats, and not exceed 30 double-spaced A4 pages. All submissions are subject to quality control by the editorial counsel and independent referees. A promising manuscript may be returned to the author(s) for polishing or rewriting. The editor also invites econometrics experts worldwide to contribute to the methodological sections of the journal.

Articles and methodological material published in “Quantile” do not transfer original copyright, neither in full, nor in part.

# *Quantile*

*international econometric journal  
in Russian language*

**#1  
September 2006**

## **IN THIS ISSUE**

Editor and editorial counsel. A word to readers 1

### **Econometric literacy: time series prediction**

Tsyplakov, Alexander. Introduction to prediction in classical time series models 3  
Cochrane, John. Prediction and impulse responses in linear systems 21  
Söderlind, Paul. Prediction of stock returns 27  
Anatolyev, Stanislav. Testing for predictability 39  
Itskhoki, Oleg. Model selection and paradoxes of prediction 43  
McCracken, Michael. Pairwise tests of equal forecast accuracy 53

### **Impressions from conferences**

Zinde-Walsh, Victoria. UK Econometric Study Group annual meeting 63

### **Articles**

Siliverstovs, Boriss. Modelling demand for money in Latvia 67  
Arzhenovsky, Sergey. Socioeconomic determinants of smoking in Russia 81  
Belousov, Sergey. Volatility modelling with jumps: application to Russian and American stock markets 101