

История эконометрики

Нелинейная динамика и теория хаоса в экономической науке: историческая ретроспектива^{*}

Артем Прохоров[†]

Университет Конкордия, Монреаль, Канада

В данном историко-экономическом эссе прослеживается эволюция идей о нелинейности, стохастичности и динамичности в экономической науке, которая связывает линейный и статический детерминизм XVIII–XIX веков с нелинейными механистическими системами со случайным компонентом и детерминистическими и стохастическими динамическими системами XX-го века, в частности, с теорией хаоса. Особое внимание уделяется моделям второй половины XX-го века; тем не менее, эссе не содержит ни одной сложной формулы.

«Мы уже знаем физические законы, лежащие в основе всего, с чем мы встречаемся в ежедневном обиходе... Показателем того, какой длинный путь нам удалось пройти, можно считать тот факт, что сейчас нам приходится использовать мощнейшие машины и тратить огромные средства на осуществление экспериментов, результаты которых мы *не* можем предсказать».

Стивен Хокинг, цитата из Gleick (1991)

1 Введение

Важность динамических систем (как детерминистических, так и стохастических) в истории науки предопределяется их связью с вопросом о предсказуемости природных и социальных процессов. В свою очередь, вопрос о том, предсказуемы ли происходящие вокруг нас явления, находится в центре дискуссии о свободе выбора и воле человека, об исходном и конечном состоянии социально-экономических и естественных систем и других философских вопросов. Как это ни парадоксально, наблюдаемое «поведение» некоторых детерминистических динамических систем неотличимо от поведения систем, движимых исключительно случаем. Ни то, ни другое мы, как и раньше, не в состоянии предсказывать. Нежелание мириться со столь парадоксальным и ироническим положением вещей, по всей вероятности, и заставляет ученых работать над динамическими моделями. В ходе этой работы удалось сделать множество значимых открытий. О них и идет речь в данном эссе.

В рамках экономической науки противостояние детерминистических и стохастических взглядов вылилось в обширную критику классических экономических моделей, унаследованных господствующей современной экономической парадигмой (мейнстримом). Многочисленные варианты этой критики касались наблюдаемых в действительности явлений, находящихся в

^{*}Цитировать как: Прохоров, Артем (2008) «Нелинейная динамика и теория хаоса в экономической науке: историческая ретроспектива», Квантиль, №4, стр. 79–92. Citation: Prokhorov, Artem (2008) “Nonlinear dynamics and chaos theory in economics: a historical perspective,” *Quantile*, No.4, pp. 79–92. Автор признателен профессору Джеффри Бидлу (Университет штата Мичиган, США) за его комментарии в ходе работы над эссе.

[†]Адрес: 1455 de Maisonneuve Blvd West, Montréal, Québec, H3G 1M8, Canada. Электронная почта: Artem.Prokhorov@concordia.ca

противоречии с выводами классической экономической теории, например, постоянных беспорядочных колебаний экономических показателей и отсутствия всяких признаков сходимости экономических систем к стабильному равновесию, предсказанному классиками. Рыночная экономика представляется многим скорее как динамически нестабильная система, а не детерминистическая система, в которой редкие эпизоды нестабильности являются следствием внешних шоков. Как станет ясно из дальнейшего изложения, нелинейность динамических экономических систем могла стать связующим звеном между детерминистическими классическими моделями и наблюдаемыми характеристиками экономических процессов, а хаотическая динамика могла бы служить одним из возможных объяснений наблюдаемых противоречий.

Теория хаоса занимает особое место в каждой области знаний, где мы имеем дело с динамикой. В таких науках, как физика, биология, метеорология, медицина и химия, история теории хаоса – это преимущественно история успешного объяснения какого-то важного явления, например, электрических и механических колебаний в физике, роста численности вида в биологии, схемы образования воздушных и водных потоков в метеорологии, особенностей функционирования сердца и мозга в медицине, особенностей протекания реакций в химии. В экономике, однако, история исследований в области хаотической динамики не настолько успешна. Так и не удалось с достоверностью установить, имеет ли место хаотическая динамика низкой размерности в экономических процессах, и многие из старинных противоречий между предсказанными экономическим мейнстримом и наблюдаемыми в действительности явлениями все еще не разрешены. Тем не менее, эти исследования привели к возникновению новых эконометрических методов. Одно это делает их достойными изучения.

Цель настоящего эссе – предоставить обзор динамических методов, делая акцент на интуиции и преимуществах, которые свойственны исследованиям в этой области, а не на технических деталях. Во второй части рассматриваются механистические представления о мире, унаследованные экономическим мейнстримом от науки XVIII-го века, в частности, от классической экономической науки. В третьей части обозначены основные этапы в истории экономических учений, которые в конечном итоге привели к распространению стохастических и нелинейных моделей. Четвертый раздел целиком посвящен теории хаоса. В заключении нашего ретроспективного повествования обсуждаются перспективы динамического моделирования в экономике.

2 Динамические модели в экономике и классическое механистическое мировосприятие

Возникновение экономики как науки часто связывают с интеллектуальной средой второй половины XVIII-го и начала XIX-го века. Философия Просвещения, которая доминировала в передовых странах мира в то время, заимствовала многое из эпохи Возрождения. Установление гуманистических ценностей и возрождение классического интереса к познанию окружающего мира после долгого периода культурной стагнации на протяжении Средних Веков, сопровождаемое открытием и освоением новых континентов, значительными успехами в естественных науках, закатом феодализма и ростом торговли, – эти вехи эпохи Возрождения предопределили характер эпохи Просвещения.

В центре философии Просвещения была неограниченная сила человеческого разума, с помощью которой считалось возможным понять все законы Вселенной и даже улучшить текущее состояние дел. Знание и свобода стали основными составляющими счастья для человека. Именно поэтому мы наблюдаем тесную связь между философией Просвещения и естественными науками, призванными помочь человеку обрести счастье. Неудивительно, что Ньютон, Лейбниц и другие ученые, внесшие в то время крупный вклад в развитие естественных наук, были одновременно влиятельными философами.

Физика – идеал науки эпохи Просвещения – имела, пожалуй, наиболее сильное воздействие на общество и ученых. Эта наука могла с точностью предсказать результат эксперимента, осуществленного в четко определенной среде. Несколько физических констант лежат в основе базовых законов движения систем и предопределяют предсказуемость эксперимента. Считалось, что вся Вселенная, все и вся, управляется «естественными законами», то есть набором причинно-следственных закономерностей, отражающих абсолютную предсказуемость всех явлений. Известно, что в 1776 г. Лаплас писал:

«Текущее состояние природной системы, по-видимому, является следствием того, в каком состоянии она пребывала в предыдущий момент, и если бы ... были известны все закономерности, связывающие все объекты во Вселенной, то можно было бы знать их относительное местоположение, их перемещения и общее воздействие всех этих объектов друг на друга в каждый момент времени, как в прошлом, так и в будущем.

Физическая астрономия, область знаний, которая вызывает больше всего уважения, предоставляет нам возможность ... видеть, как это происходит. Простота закона, по которому вращаются небесные тела, ... позволяет проследить аналитически их движение до любой точки; ... достаточно знать их местоположение и скорость в отдельный момент времени. Это становится возможным благодаря инструментам, доступным человеку, и небольшому числу закономерностей, задействованных в соответствующих вычислениях. Из-за незнания причин, вызывающих явления, из-за их сложности наряду с неточностью анализа мы не можем достичь такого же уровня предсказуемости в отношении подавляющего большинства явлений. Поэтому существуют вещи, которые мы не можем утверждать с достоверностью, более или менее вероятные явления, и мы пытаемся компенсировать наше незнание тем, что оцениваем степень их вероятности. Таким образом, именно слабости человеческого разума мы обязаны одной из самых утонченных и оригинальных математических теорий – наукой случая, или теорией вероятности» (цитата из Crutchfield, Farmer, Packard & Shaw, 1986).

Это высказывание Лапласа характерно для научной среды конца XVIII – начала XIX века. В нем мир предстает абсолютно детерминистическим; стохастичность сама по себе отсутствует; неопределенность понимается как недостаток знания о детерминистических закономерностях сложной системы; свободная (точнее, непредопределенная) воля – миф. Интересно, что, не подозревая об этом, Лаплас выразил в этой цитате более чем двухвековой давности идеи, высказываемые в отношении теории хаоса во второй половине XX-го века.

Основополагающие работы Смита, Рикардо, Милля, Маршалла и других экономистов-классиков, без сомнения, ощутили на себе воздействие политических и социальных аспектов натурфилософии Просвещения. Поиск детерминистических «законов движения» экономической системы прослеживается в дебатах о «невидимой руке», о рациональности экономических субъектов, о конкурентных рынках и пр. Центральной для формирования экономики как науки была идея о том, что индивиды ведут себя в соответствии с некоторыми типичными схемами. Подобная схожесть экономики с естественными науками становилась особенно очевидной по мере того, как экономика становилась все более и более математизированной во второй половине XIX-го века. Основоположники математического подхода в экономической науке, такие как Вальрас, Парето, Курно, утверждали, что хотят устранить ошибки классических экономистов, переписав «естественные законы» в форме, соответствующей по уровню внутренней последовательности физическим законам. Многие из этих экономистов были по образованию физиками, инженерами и математиками.

Важно отметить, что механистический взгляд на мир не всегда был статическим. Приведенная выше цитата показывает, что динамическая зависимость текущего состояния системы от предыдущего уже была общепринятой. Теория социально-экономических формаций Маркса, к примеру, была, в сущности, динамической теорией. Однако динамичность систем была, как правило, завуалирована и принимала форму того, что сейчас называют сравнительной статикой.

По существу, классическое физическое мировоззрение тоже было линейным. К примеру, Lorenz (1989) утверждает, что взаимодействие между явлениями исследовалось классическими физиками как аддитивное, то есть физические явления изучались отдельно от среды, в которой они происходили, а сложные системы рассматривались как результат «линейного наложения» отдельных элементов.

В 1844 году, описывая «беспокоящие причины», не позволяющие экономической науке достичь уровня предсказательной способности, характерного для некоторых других наук, Милль утверждал в духе линейного детерминизма: «Нет закона, действующего в девяноста девяти случаях из ста, и исключения из него, имеющего место в одном случае из ста, а есть два закона, оба действуют во всех ста случаях и приводят к совместному результату посредством объединения своих действий» (Mill, 2000, стр. 114).

Линейный квази-динамический детерминистический подход особенно очевиден в анализе частичного равновесия Маршалла. В своих «Принципах» он сравнивает экономику с наукой о приливах и отливах, с одной стороны, и с законом гравитации, с другой. Он приходит к выводу, что экономическая наука не может достичь уровня предсказательной способности закона гравитации, потому что ей не свойственно знание комплексной природы взаимодействий, характерное науке о приливах и отливах:

«... хотя и существует множество видов воздействия, оказываемых на Юпитер и его спутники, но каждый из этих видов воздействия осуществляется строго определенным образом, который можно предсказать заранее, но никто не знает достаточно о погоде, чтобы предсказать ее воздействие... Законы экономики скорее сравнимы с законами приливов и отливов, а не с законами гравитации. Ведь действия человека столь многообразны и неточны, что даже самые достоверные прогнозы таких действий не могут не содержать неточностей и ошибок» (Marshall, 1949, стр. 18).

Чтобы преодолеть эту проблему, Маршалл изолирует отдельные элементы комплексной системы и рассматривает все другие элементы как экзогенные. Этот метод позволяет ему дать приемлемое объяснение взаимосвязи между эндогенными переменными, а также в отдельных случаях между эндогенными и экзогенными переменными, но в общем случае не возникает динамической картины, с помощью которой можно было бы представить всю систему целиком.

Lorenz (1989) утверждает, что сравнительная статика применима, только если динамический процесс сходится к новому равновесному состоянию после воздействия шока, и если не существует обратной связи от эндогенных переменных к экзогенным. Несмотря на это, в соответствии с Лоренцом современная экономическая наука делает акцент на линейных видах зависимости, как и в начале формализации экономики как науки. Без сомнения, признает Лоренц, экономический анализ был обогащен работами о существовании и стабильности равновесия в рамках теории общего равновесия, в частности, работами Эрроу и Дебре. Однако, на протяжении последней части XIX – первой части XX века экономический мейнстрим занимался лишь несколькими, наиболее «удобными» видами линейного динамического поведения, в частности затухающими или осциллирующими колебаниями, вызываемыми монотонным или осциллирующим схождением к стационарному равновесному состоянию (так называемому устойчивому узлу или фокусу) или стабильными осцилляциями (так называемой центральной динамикой).

В начале XX-го века стало ясно, что простые выводы линейных детерминистических квази-динамических систем не давали полной картины и не соответствовали свойствам растущего объема экономических временных рядов. Следуя традициям ранних институционалистов, Весли Митчелл писал в своем президентском обращении к Американской экономической ассоциации в 1924 году (Mitchell, 1925, стр.11): «... Статистический взгляд на вещи предполагает использование понятий разнородность, вероятность, аппроксимация ... Механистические рассуждения используют понятия подобия, постоянства, инвариантности законов. В

экономике такие понятия неприменимы для точного описания явлений. Поэтому нам следует довериться наблюдениям».

Mirowski (1989) предлагает живое описание чувства неудовлетворенности состоянием дел, царившего в начале века среди экономистов (особенно, так называемой «Колумбийской школы»).

Аналогичным образом, Day (1992) показывает, что если разместить экономические величины «на био-астрономической шкале времени», то микро- и макроэкономическим величинам и показателям роста будут характерны беспорядочные флуктуации, а общее экономическое развитие будет иметь экспоненциально-неустойчивый характер. Фактически отсутствуют доказательства классического тезиса о сходимости экономических процессов к стационарному состоянию или к упорядоченным периодическим циклам.

Еще более важным оказалось коренное изменение в научной среде, произошедшее в начале XX-го века, когда в рамках теории относительности и квантовой механики удалось показать применимость стохастических динамических концепций.

3 Нелинейная динамика в экономике

Наблюдаемым экономическим временным рядам не свойственна упорядоченность, предсказываемая линейными динамическими механистическими системами. В противоположность теории равновесия, показатели частоты и амплитуды экономических флуктуаций беспорядочны и не показывают ни четкой сходимости, ни устойчивых колебаний. Их предсказание с помощью детерминистических «естественных законов» оказалось невозможным. Такое состояние дел в экономике отражало общую проблему предсказуемости, характерную для всех наук на рубеже века, в частности, для физики. Обсуждая предсказуемость состояния Вселенной исходя из исходного момента, Пуанкаре утверждал в 1908 году (по цитате из Lorenz, 1989, стр. 14) :

«... Даже если бы законы природы не таили никаких секретов от нас, мы все равно могли бы знать исходное состояние только *приблизительно*. Если бы мы могли при этом предсказывать последующие состояния с той же степенью *приближения*, то это было бы все, что нам нужно, и мы сказали бы, что явление предсказано, что в его основе лежат [детерминистические] законы. Но это не всегда так; возможно, что малые различия в начальных условиях приведут к очень большим различиям в конечном явлении. Малая ошибка в первом приведет в огромной ошибке в последнем. Предсказание станет невозможным, и мы будем иметь дело со случайным явлением».

Mirowski (1995) считает, что несмотря на стохастичность наблюдаемых явлений и на готовность классической физики включить ее в рассмотрение, классические экономисты неохотно отдавали позиции детерминизма, занимаемые ими с момента возникновения экономики как науки. Неоклассическая экономическая теория отчетливо включила в себя стохастические элементы только в конце 1930-х – начале 1940-х годов. И даже тогда включение стохастических компонентов в так называемую Новую классическую макроэкономическую теорию представляло собой скорее компромисс: стохастические экзогенные шоки налагались (чаще всего, линейно) на детерминистические модели и генерировали динамику, похожую на наблюдаемую в реальных временных рядах. Slutsky (1937) наряду с другими исследователями показал, что динамика линейной динамической модели цикла деловой активности с аддитивным случайным компонентом, не всегда имеющим экономическую интерпретацию, очень близка к динамике, наблюдаемой в реальности.¹ Например, простая линейная модель

¹Интересно, что, пожалуй, наиболее часто цитируемая статья, объединившая классический детерминизм с наблюдаемой стохастичностью экономических процессов, была впервые опубликована в отнюдь не классических кругах. Она была написана тогда еще советским экономистом Евгением Слуцким, когда он работал над динамикой советского цикла деловой активности в Конъюнктурном институте Наркомата финансов СССР

$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$, где ε_t – случайная ошибка (белый шум), соответствует процессу взвешенного скользящего среднего (МА) по ε , который может быть похож на наблюдаемые циклические ряды. Немного более сложный авторегрессионный процесс (ARMA) с двумя и более временными лагами переменной x и с МА-процессом в ошибках тоже может воспроизвести такую динамику. Таким образом, процессы типа ARMA стали следующим шагом в развитии классических детерминистических процессов типа $x_t = \alpha x_{t-1}$, которые, как известно, могут производить обычные осцилляции (см., например, Baumol & Benhabib, 1989).

Однако во многих случаях, такие модифицированные виды простейших классических процессов, часто называемые парадигмой Фриша–Слуцкого, не в состоянии дать экономическое объяснение «экзогенных шоков» и серийной корреляции между ошибками. Более того, многие эмпирические явления не могут быть адекватно описаны с помощью линейных стохастических уравнений. Среди таких явлений часто упоминается отсутствие сходимости в показателях национального дохода на душу населения стран мира, длительные периоды безработицы и наблюдаемые периоды неравной степени волатильности экономических показателей. Например, такие явления обсуждает Jarsulic (1998). Он заключает, что, несмотря на успех, достигнутый с помощью неоклассического подхода в некоторых эмпирических вопросах, многие задачи остаются нерешенными из-за «недостаточной нелинейности» классических моделей.

Lorenz (1989) также замечает (стр. 30), что неспособность отделить на базе наблюдаемых данных линейные модели со стохастическим компонентом от нелинейных моделей подрывает доверие к классическим моделям. Вследствие того, что принятие гипотезы о линейности часто базируется на получении регрессионной оценки для соответствующей модели ARMA с высоким показателем согласия, а проверка на нелинейность связана со сложными тестами, доводы в пользу линейности экономических моделей могут быть преувеличены.

Интересно отметить, что развитие смежных дисциплин имело существенное воздействие на внедрение идей стохастичности в экономическую науку. Например, теория институционализма, зародившаяся в начале века как синтез экономики, психологии и биологии, опровергала классические представления о детерминизме экономических процессов. В противоположность этому, институционалисты предлагали рассматривать прогресс как случайный, ателеологический, динамический процесс эволюции, в рамках которого институты влияют на систему и испытывают на себе ее воздействие в бесконечной череде вариации, селекции и трансмиссии, в которой незначительная вариация может иметь неожиданные, значительные последствия. Таким образом, институционализм воплотил нелинейное динамическое понимание стохастичности с обратной связью, которое становилось доминирующим в науке того времени. Аналогичным образом, статистические работы по цепям Маркова и броуновскому движению, тоже начавшиеся в начале века, привели к возникновению гипотезы случайного блуждания в экономике и к огромному объему теоретических и эмпирических работ, кульминацией которых стала относительно новая дискуссия об эффективности рынков.

Экономисты, недовольные неоклассическими линейными стохастическими объяснениями, искали альтернативные пути. Появились нелинейные экономические модели. В середине XX-го века группа кейнсианских макроэкономистов предложила нелинейные макроэкономические модели, в которых возникала динамика, схожая с реальной (см. примеры таких моделей в работе Lorenz, 1989). С классической стороны экономической науки, внедрение нелинейности привело в возникновению современной теории реального цикла деловой активности, к рамках которой динамика экономических переменных возникает как решение задачи оптимизации во времени и тоже соответствует эмпирически подмеченным характеристикам. При этом считается, что экзогенные шоки вводятся в такие модели для описания отдельных интересующих нас внешних воздействий, а отмеченные характеристики возникают внутри таких нелинейных моделей вне зависимости от экзогенных факторов.

Boldrin & Woodford (1990) и Baumol & Benhabib (1989) перечисляют похожие результаты, полученные во многих областях экономической науки в результате внедрения нелинейности. В числе нелинейных динамических экономических моделей следует отметить модель паутинообразного механизма ценового реагирования, модель оптимального роста, модель с перекрывающимися поколениями, кейнсианские модели бизнес-циклов, модели циклов экономического роста Калдора и Гудвина, модель роста Солоу, модель спроса с адаптивными предпочтениями, мальтусианская и неоклассическая демографическая модели, модели с финансовой обратной связью, модели выбора с эндогенными вкусами, модели роста производительности, модели дуополий и пр. Интересно, что классические модели общего равновесия со стандартным предположением о совершенной конкуренции, совершенном предвидении и совершенной информации тоже могли воспроизводить нетрадиционные колебания.

Kaldor (1940) и Goodwin (1955) стали, пожалуй, наиболее выдающимися и наиболее часто цитируемыми примерами ранней литературы на эту тему. Предложенные этими авторами модели, которые многие считают прототипами нелинейных динамических систем в экономике (см., например, Lorenz, 1989), генерируют динамику на базе эффекта мультипликатора-акселератора с нелинейной функцией инвестиций. Более поздние работы, в которых нелинейные динамические модели применяются для анализа экономических проблем, включают Puu (1997) и Chiarella (1990). Puu (1997) демонстрирует, что предложенный в работе Robinson (1933) анализ проблемы монополистического ценообразования в ситуации, когда кривая предельных издержек пересекает кривую предельной выручки в двух точках, применим также к нелинейным динамическим моделям с нелинейной функцией предельной выручки. Chiarella (1990) предлагает нелинейную интерпретацию паутинообразной динамики. Интересно, что работы начала 70-х годов так называемого «Римского клуба», посвященные экономическому росту и его долгосрочным «пределам», тоже применяют концепции нелинейной динамики. В этих работах экспоненциальные динамические модели роста применялись для описания «конца света», ожидающего человечество (см., например, Cole, 1973). Не станем перечислять все подобные работы, скажем лишь, что нелинейные динамические модели привнесли много нового в наше понимание большого числа экономических явлений, несмотря на то, что явное решение динамической нелинейной системы редко бывает доступно.

Многие из нелинейных детерминистических систем оказались способными генерировать столь беспорядочную динамику, что ни один из общепринятых тестов не мог отделить такую детерминистическую систему от чисто случайного процесса (белого шума). Такие нелинейные динамические модели, способные «генерировать» стохастичность и демонстрирующие сильную зависимость от начальных условий и значений параметров, являются предметом теории хаоса.

Часто считается, что «нелинейная динамика» и «хаос» очень близки по смыслу или вообще синонимы. Однако на самом деле это два разных термина, хотя и возникли они примерно в одно и то же время в 1960–70 гг. как быстро растущие сферы исследования, поначалу в статистике и физике, а вскоре и в экономике и эконометрике. Всякая хаотическая система нелинейна, но не всякая нелинейная система хаотична. Нелинейная динамика может быть выражена в форме нелинейного дифференциального или разностного уравнения. Но существует масса нелинейных моделей, которые не способны генерировать хаотическую зависимость, например, предложенная в работе Robinson (1977) нелинейная модель скользящего среднего, имеющая форму $x_t = \varepsilon_t + \alpha \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}$, или предложенная Tong & Lim (1980) пороговая авторегрессионная модель, в которой x_t подчинен разным авторегрессионным процессам в зависимости от своего значения.

Пожалуй, наибольший интерес был вызван моделями, призванными описывать какое-то важное изменение характеристик процесса, часто называемыми «моделями со структурным сдвигом» или «моделями с разными режимами». Наиболее простой вариант таких моделей включает в себя два типа периодов, каждый из которых характеризуется своим значением

среднего и/или дисперсии распределения используемой случайной величины. Более сложные варианты используют цепи Маркова для отражения вероятностей перехода такого процесса из одного режима в другой. Многие считают этот тип нелинейной динамики, введенный в эконометрику в работе Hamilton (1989), одним из наиболее перспективных по отношению к макроэкономическим проблемам (см., например, Pesaran & Potter, 1992).

Одной из возможных альтернатив хаосу является ряд стохастических моделей, которые не генерируют автокорреляцию. Это модели типа ARCH, предложенные в Engle (1982) и обобщенные в Bollerslev (1986). В этих моделях $x_t = \sigma_t \varepsilon_t$, а σ_t^2 представляет собой условную дисперсию ошибки, имеющую форму ARMA-процесса $\sigma_t^2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_{t-1}^2 + \alpha_3 \sigma_{t-1}^2$.

Среди моделей типа ARCH (экспоненциальная, асимметричная, пороговая и др.) наиболее популярными в последнее время, пожалуй, являются так называемые интегрированные модели (IGARCH) и дробно-интегрированные (FIGARCH) модели. По аналогии с интегрированными ARMA-моделями в интегрированных моделях типа GARCH текущая информация о характеристиках процесса (в моделях IGARCH – о его дисперсии) остается одинаково важной для предсказания характеристик процесса (в моделях IGARCH – его волатильности) всех будущих периодов; другими словами, в моделях IGARCH имеется единичный корень в авторегрессионном процессе, описывающем σ_t^2 ; для упомянутого выше простейшего процесса GARCH это означает, что $\alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Однако, в имеющихся временных рядах автокорреляция показателя волатильности медленно уменьшается, а не остается одинаково сильной и не сокращается экспоненциально, как в случае, когда интеграция отсутствует (I(0)). Модель типа FIGARCH, предложенная в работе Baillie, Bollerslev & Mikkelsen (1996), призвана устранить столь существенное различие между I(0) и I(1); недавние примеры использования FIGARCH для моделирования финансовых временных рядов оказались весьма успешными. Модели, совмещающие в себе нелинейные модели волатильности и модели Маркова с множественными режимами, стали следующим этапом нелинейного моделирования (см., например, Beine, Laurent & Lecourt, 2003).

Экономические динамические модели интересны не только с теоретической точки зрения. Эмпирические исследования свидетельствуют в пользу того, что динамические экономические системы нелинейны (Day, 1992; Hsieh, 1991; Baumol & Benhabib, 1989). Однако эти свидетельства касаются только упомянутых нелинейных динамических моделей и не затрагивают хаотических моделей. После головокружительного взлета интерес к хаосу в экономике постепенно ослабевал по мере того, как эмпирические исследования, проводимые в течение последних двух десятилетий, не подтвердили наличие хаотической динамики в экономических данных.

4 Хаотическая динамика в экономике

Если бы не было квантовой механики и теории хаоса, классические взгляды на предсказуемость (вроде отраженных в приведенной выше цитате Лапласа) не исключали бы возможности, что природные процессы могут быть с точностью предсказаны – необходимо только знать воздействующие на них закономерности и начальные условия. Однако в общем случае это невозможно (как видно из приведенной выше цитаты, Пуанкаре предвидел это). Квантовая теория (а именно, принцип неопределенности Гейзенберга) исключает возможность точного определения исходного состояния системы, а теория хаоса утверждает, что из-за этой исходной неточности полной предсказуемости достичь невозможно. Другими словами, детерминизм и предсказуемость могут не иметь ничего общего.

Когда мы измеряем состояние системы, мы обозначаем ее в некоторой, по возможности малой, области пространства, которое определяется всеми возможными состояниями системы. Если бы мир был полностью предсказуем, дальнейшее развитие системы (траектория, или орбита, ее состояний) происходило бы в столь же малой области пространства, созда-

вая тем самым так называемый стабильный аттрактор системы, то есть множество орбит, к которому стремилась бы система, делая свое развитие предсказуемым. Такие аттракторы детерминистических динамических систем, как неподвижные точки, предельные циклы и торы, были известны ранним исследователям нелинейных динамических систем. Однако в начале 60-х годов в число известных аттракторов динамических систем были включены так называемые странные (или хаотические, непредсказуемые) аттракторы. Странный аттрактор, как и всякий аттрактор динамической системы, «притягивает к себе» траектории системы, но траектории долго не остаются близко друг к другу, а быстро расходятся внутри аттрактора и на определенных этапах снова проходят вблизи друг друга. В таком аттракторе траектории случайно перемешаны и никогда не дублируются, сколь близкими ни были бы начальные условия системы. Таким системам чужда долгосрочная предсказуемость.

Постоянное смещение траекторий внутри аттрактора часто описывают как процесс многократного растягивания и складывания аттрактора вдвое, в результате которого аттрактор представляет собой множественные самоподобные складки. Хаотический аттрактор – это фрактал, то есть геометрический объект, последовательное увеличение которого обнаруживает все больше и больше деталей, притом объект остается подобен самому себе на каждом этапе увеличения. Бенуа Мандельброт считается многими основоположником учения о фракталах. В серии основополагающих работ по экономике, геометрии и физике, написанных в 70-е годы, он ввел это понятие в оборот (см., например, Mandelbrot, 1991) и использовал его для решения некоторых старых «задач» (см., например, Mirowski, 1995).

В силу описанного свойства хаотические системы способны генерировать случайную динамику без какого-либо внешнего случайного воздействия. Случайная динамика возникает не потому, что происходит аккумуляция случайных ошибок, а потому, что траектории системы подвержены бесконечному смешению, описанному выше. Часто подчеркивается (см., например, Jarsulic, 1998; Baumol & Benhabib, 1989), что, даже если бы детерминистический закон, лежащий в основе хаотической системы, был точно известен, самая мельчайшая ошибка в измерении начальных условий или в вычислении динамики отдельного периода привела бы к экспоненциально растущей ошибке прогноза. Поэтому в отношении хаотических систем возможен только очень краткосрочный прогноз.

У. Брок, Б. ЛеБарон, Х. Шейнкман, Р. Дей, Дж. Рамсей, У. Дечерт, Д. Шей были в числе первых исследователей хаоса в экономике, когда эта сфера становилась особенно популярной в начале 1980-х годов. Среди множества дифференциальных и разностных уравнений, которые были предложены для моделирования хаотической динамики между x_t и x_{t-1} , в частности, отображение Хенона, отображение Лоренца, уравнение Макей–Гласса, генератор псевдо-случайных чисел и др. (см. список наиболее популярных хаотических отображений в Hsieh, 1991), для демонстрации наиболее подходящим, пожалуй, является отображение, имеющее форму $x_t = \alpha x_{t-1}(1 - x_{t-1})$. Для малых значений α эта система стабильна, но для близких к 4 значений она генерирует хаотическую динамику. Несмотря на то, что это полностью детерминированный процесс, x_t кажется случайной величиной с эмпирической автоковариационной функцией $\rho(k) = \mathbb{E}[x_t x_{t-k}] \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что делает ее схожей с белым шумом. Мельчайшая ошибка в измерении начального условия x_0 экспоненциально увеличивается в x_t , и резкие скачки могут следовать за серией незначительных уменьшений и увеличений.

Первые экономические публикации, посвященные хаосу, были чрезмерно оптимистичными в отношении перспектив использования хаоса и даже построения альтернативной экономической теории на базе теории хаоса. Когда читаешь работы таких популяризаторов хаоса как Дж. Глейк, чья книга о хаосе была лидером продаж по версии газеты *New York Times* в конце 80-х годов, создается впечатление, что наука была на грани переворота. Экономическая наука должна была вот-вот заменить неоклассическую детерминистическую или квази-стохастическую линейную парадигму на более реалистические хаотические объясне-

ния, которые устранили бы такие важные элементы неоклассической теории, как концепции рациональности, предсказуемости и совершенного предсказания.

Однако этот энтузиазм постепенно заметно убавился по мере того, как экономисты, пытающиеся обнаружить хаотическую динамику, наткнулись на препятствия в виде коротких временных рядов и большого набора других нелинейных эффектов, которые могут на самом деле иметь место в экономических данных. Mirowski (1989, 1995) полагает, что именно неоклассическое нежелание воспринимать объяснения, предлагаемые теорией хаоса, сыграло решающую роль в том, что теория хаоса не сделала еще большего переворота в экономике. Однако несложно видеть на базе эмпирических и теоретических работ по хаосу в экономике (см., например, Lorenz, 1989 и Руц, 1997), что, несмотря на множество интересных теоретических разработок в сфере динамики экономических систем, эмпирическая задача по выделению хаотической динамики из экономических временных рядов объективно более сложная, чем в естественных науках, и часто не в состоянии оправдать вложенные в решение этой задачи усилия, с учетом других многообещающих областей нелинейных исследований.

В середине 80-х годов, по-видимому, пришло понимание того, что высокосложный хаотический процесс (то есть нелинейный динамический процесс, действующий много переменных), с практической точки зрения эквивалентен случайному процессу, например, броуновскому движению (см., например, обсуждение генератора псевдо-случайных чисел в Hsieh, 1991 и Brock, Hsieh & LeBaron, 1991), и что только не слишком сложные хаотические системы (хаос малой размерности) могут обладать краткосрочной предсказуемостью, которую невозможно достичь в рамках таких традиционных линейных моделей, как ARMA (см. Baumol & Benhabib, 1989).

Примерно в то же время были разработаны несколько статистических тестов на наличие хаоса малой размерности. Понятие корреляционной размерности, разработанное Grassberger & Procaccia (1983), является, пожалуй, наиболее важным. Оно позволяет проверить данные на наличие хаотической динамики, используя при этом одну характеристику, свойственную хаотическим системам и не свойственную стохастическим системам, а именно наличие «дыр», оставляемых хаотической системой в пространствах большой размерности. Тест осуществляется так. Ряд x_t трансформируется во множество векторных множеств размерности от 1 до n (эта размерность называется «размерность вложения»): $x_t, (x_{t-1}, x_t), \dots, (x_{t-n+1}, \dots, x_t)$. Затем вычисляется доля пар векторов, удаленных друг от друга на расстояние не более d (корреляционный интеграл). Корреляционная размерность – это предел наклона графика логарифма корреляционного интеграла как функции $\log d$ при $n \rightarrow \infty$. Если корреляционная размерность стремится к бесконечности, это означает, что процесс равномерно «заполняет» n -мерное пространство, что значит, что он случайный. Если же корреляционная размерность прекращает рост при некотором значении n , то это говорит в пользу n -мерного хаоса.

Несложно видеть, почему высокосложные хаотические системы (n больше, чем 5) столь сложно обнаружить. Невозможно установить, стремится ли корреляционная размерность к бесконечности, если используются конечные временные ряды. Практически нет разницы между реализацией чисто случайного процесса и многомерным хаосом. Более того, в работе Hsieh (1991) подчеркивается, что, в то время как в естественных науках для тестов на маломерный хаос нередко использовались выборки в 100000 наблюдений и более, наиболее длинные временные ряды в экономике обычно содержали примерно 2000 наблюдений; он отмечает, что двухсот непересекающихся векторов, соответствующих размерности вложения 10, недостаточно, чтобы установить, «заполняют» ли они десятимерное пространство равномерно. Вдобавок, Ramsey, Sayers & Rothman (1990) показывают, что в относительно коротких экономических временных рядах (даже состоящих из 2000 точек) подтверждения наличия хаоса могли быть получены там, где его нет, потому что оценка наклона графика логарифма корреляционной размерности смещена вниз в малых выборках. Они также сделали обзор имеющихся работ, проверяющих экономические данные на наличие хаотической динамики,

и пришли к заключению, что после корректировки на малые выборки в большинстве случаев нет оснований полагать, что был найден простой хаотический аттрактор, а скорее некоторая нелинейная динамика. Этот же результат был получен Scheinkman & LeBaron (1989), которые утверждают, что нелинейные стохастические модели, например, модели типа ARCH, могут генерировать динамику, схожую с динамикой хаотических отображений, и что тест на хаос, базирующийся на корреляционной размерности, может на самом деле отражать наличие именно таких видов нелинейности.

Так называемый BDS-тест, который предложили Brock, Dechert & Scheinkmann (1987), представляет собой улучшенную версию теста корреляционной размерности, поскольку он делает количественную оценку проще. С использованием корреляционной размерности авторам удалось разработать статистику, имеющую предельное нормальное распределение, что сделало возможным тестирование нулевой гипотезы о случайности временного ряда. Hsieh (1991) использовал симуляции Монте-Карло для проверки способности BDS-теста различать между независимыми и одинаково распределенными (НОР) наблюдениями, генерированными одним из «хороших» генераторов псевдо-случайных чисел, и разнообразными видами линейных и нелинейных зависимостей, как стохастических, так и детерминистических. Выяснилось, что BDS-тест отвергает гипотезу НОР для большого множества процессов, в том числе ARMA, GARCH, TAR, моделей со сменой режима и нескольких маломерных хаотических отображений. Проверка данных на случайность, осуществленная автором с помощью BDS-теста в отношении доходности акций, привела к однозначному отвержению гипотезы, что показатель доходности акций есть НОР. Следовательно, нелинейная динамика может иметь вовсе не хаотическое происхождение. Интересно, что Scheinkman & LeBaron (1989) установили с помощью непараметрических методов, что источником нелинейности служит, скорее, условная гетероскедастичность, а не хаотическая динамика, смена режима или какие-то другие факторы. Хотя стандартные модели типа ARCH не исчерпывают все нелинейные свойства данных по доходности акций, более гибкая модель типа GARCH с НОР-ошибками, по-видимому, лучше справляется с задачей. Другие исследователи, работающие с данными об обменных курсах и процентных ставках, почти единогласно подтверждают это заключение.

Было разработано еще несколько тестов на наличие хаоса. В настоящее время ни один из имеющихся тестов не в состоянии предоставить достаточно убедительные свидетельства в пользу хаотической динамики в экономических данных. Отсутствие таких доказательств переориентировало экономистов с задач моделирования условного среднего (в частности, хаотических систем) на задачи моделирования условной дисперсии (модели типа ARCH). Предсказание волатильности вышло на первый план, хотя растущий объем доступных экономических данных все еще дает возможность подтвердить или опровергнуть полученные результаты о том, что маломерного хаоса в экономических данных нет.

5 Заключение

Теория хаоса существенно изменила методологию науки. Классический подход, в соответствии с которым выдвинутые вначале теоретические предсказания впоследствии тестируются на базе эксперимента, не вполне применим к хаотическим процессам. Поскольку долгосрочное предсказание в отношении таких процессов невозможно, проверка теории должна базироваться не на предсказательной способности, а на других, более сложных статистических свойствах выдвигаемой теории.

Исследования в области нелинейной динамики и теории хаоса скорректировали старинную редуccionистскую тенденцию в науке, в частности, в классической экономике, то есть склонность исследовать систему посредством наложения друг на друга отдельных ее элементов. Подобный линейный подход не вполне применим ко всем динамическим системам.

В частности, сложная динамика хаотических систем, которая в существенной мере зависит от взаимодействия элементов, не может быть получена в результате их наложения.

Современные финансово-экономические исследования используют высокочастотные, например, ежесекундные, данные. Без сомнения, наличие таких данных делает тестирование на нелинейность и, в частности, на хаос, более перспективным. Однако, как известно, ежесекундные данные включают в себя множество микрорыночных явлений, таких как прыжки в цене покупателя и цене продавца, выполнение лимитных ценовых ордеров и т.д. (см., например, Hsieh, 1991). Тесты на нелинейность могут улавливать и такие не относящиеся к делу явления, если их не удастся устранить усреднением более продолжительного временного ряда. В свою очередь, более продолжительные временные ряды могут испытывать смену режима. Поскольку тесты на нелинейность могут улавливать и нестационарность, используемые временные ряды должны быть не слишком продолжительны. Это соображение, по-видимому, налагает ограничение на нашу способность обнаружить хаос в экономике.

Усилия по моделированию экономических процессов сейчас переключились на анализ волатильности. Эмпирические доказательства наличия нелинейных видов зависимости во втором, а не первом моменте распределения финансово-экономических случайных величин кажутся убедительными. Одним из примеров таких зависимостей может служить взаимодействие между интервенциями центральных банков и волатильностью на рынках валют.

Теория хаоса представляет собой несколько «неудобную» область экономических исследований. Во-первых, хаотические системы почти непредсказуемы. С теоретической точки зрения увеличение предсказуемости таких систем связано с повышением точности измерения начальных условий и минимизацией ошибок вычислений. Но поскольку ошибки в таких системах аккумулируются чрезвычайно быстро, то, чтобы даже совсем немного увеличить интервал предсказания, необходимо существенно увеличить издержки, что может быть неоправданным с практической точки зрения. Во-вторых, с имеющимися на сегодняшний день экономическими временными рядами невозможно с уверенностью утверждать, что нелинейные зависимости, скрытые в этих рядах, являются хаотическими. Таким образом, исследования в области хаотической динамики в экономике – это технически сложные и дорогие попытки найти то, что с практической точки зрения может быть неоправданным с учетом других вариантов нелинейной динамики, применение которых для прогнозирования имеет куда больше перспектив. История исследований в области хаотических экономических систем показывает, что экономисты в большинстве предпочли переключиться в своих исследованиях на менее «неудобные» задачи.

Тот факт, что маломерный хаос не был обнаружен в экономических данных, не означает, конечно, что хаосу нет места в экономической науке. Теория хаоса, безусловно, обогатила наше представление об общих свойствах нелинейных динамических систем. Более того, экономические системы могут быть многомерными. В настоящее время многомерный хаос (даже если бы он существовал в экономических данных) не может быть использован для улучшений качества прогнозов, так как в условиях конечного объема данных многомерный хаос и стохастичность – фактически одно и то же. Однако по мере улучшения систем сбора и обработки данных ситуация может измениться.

Невозможность построения прогнозов на базе многомерных хаотических (или чисто стохастических) систем (о которой говорится в эпиграфе Хокинга к данному эссе) соответствует мнению Бенуа Мадельброта, которые считал (см. Mirowski, 1995), что большинство процессов находятся где-то между чистым детерминизмом и белым шумом и могут быть одинаково успешно описаны и как сложные стохастические процессы, и как хаотические процессы.

Неразделимость детерминизма (многомерного хаоса) и стохастичности, свойственная экономическим нелинейным исследованиям, также находится в соответствии с философской традицией двойственности в вопросах о свободе воли и телеологии. Даже если бы нам были известны все закономерности Вселенной, мир все равно был бы случайным, ведь слож-

ный регулярный закон и есть случайность. В своей работе о свободе воли человека Поррер (1966) писал об «облаках», которые «крайне нерегулярны, неупорядочены и более или менее непредсказуемы», и о «часах», «поведение» которых «регулярно, упорядочено и хорошо предсказуемо» (стр. 5):

«Мир – это система, в которой облака взаимосвязаны с часами, ... в определенной мере, все часы – это облака; ... существуют только облака, хотя и разной степени облачности».

Список литературы

- Baillie, R.T., T. Bollerslev & H. Mikkelsen (1996). Fractionally intergrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 74, 3–30.
- Baumol, W. & J. Benhabib (1989). Chaos: Significance, mechanism, and economic implications. *Journal of Economic Perspectives* 3, 77–105.
- Beine, M., S. Laurent & C. Lecourt (2003). Official Central Bank interventions and exchange rate volatility: Evidence from a regime-switching analysis. *European Economic Review* 47, 891–911.
- Boldrin, M. & M. Woodford (1990). Equilibrium models displaying endogenous fluctuations and chaos. *Journal of Monetary Economics* 25, 189–222.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 301–327.
- Brock, W., W. Dechert & J. Scheinkmann (1987). A test for independence based on the correlation dimension. Working Paper, University of Wisconsin–Madison.
- Brock, W., D. Hsieh & B. LeBaron (1991). *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability*. Cambridge: MIT Press.
- Chiarella, C. (1990). *The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics*. Berlin: Springer.
- Cole, H. (1973). *Models of Doom*. A critique of the *Limits to Growth*, with a reply by the authors of the *Limits to Growth*. New York: Universe Books.
- Crutchfield, J.P., J.D. Farmer, N.H. Packard & R.S. Shaw (1986). Chaos. *Scientific American* 255, 46–57.
- Day, R.H. (1992). Complex economic dynamics: Obvious in history, generic in theory, elusive in data. *Journal of Applied Econometrics* 7, S9–S23.
- Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica* 50, 987–1007.
- Gleick, J. (1991). Chaos. Глава в Т. Ferris (ed.). *The World Treasury of Physics, Astronomy, and Mathematics*. Boston: Little, Brown and Company.
- Goodwin, R. (1955). A model of cyclical growth. Глава в Е. Lundberg (ed.). *The Business Cycle in the Post-War World*. London: Macmillan.
- Grassberger, P. & I. Procaccia (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica* 9D, 189–208.
- Hamilton, J. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica* 57, 357–384.
- Hsieh, D. (1991). Chaos and nonlinear dynamics: Application to financial markets. *Journal of Finance* 46, 1839–1877.
- Jarsulic, M. (1998). Chaos in economics. Глава в У. Маеки (ed.). *Handbook of Economic Methodology*. Cheltenham: E. Elgar.
- Kaldor, N. (1940). A model of the trade cycle. *Economic Journal* 50, 78–92.
- Lorenz, H.-W. (1989). *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Berlin: Springer-Verlag.
- Mandelbrot, B. (1991). How long is the coast of Britain? Глава в Т. Ferris (ed.). *The World Treasury of Physics, Astronomy, and Mathematics*. Boston: Little, Brown and Company.
- Marshall, A. (1949). *The Principles of Economics*, 8th edition. London: Macmillan.
- Mill, J.S. (2000). *Essays on Some Unsettled Questions of Political Economy*. Kitchener: Batoche Books.

- Mirowski, P. (1989). Tis a pity econometrics isn't an empirical endeavor: Mandelbrot, chaos, and the Noah and Joseph effects. *Recherche Economique* 43, 76–99.
- Mirowski, P. (1995). Mandelbrot's economics after a quarter century. *Fractals* 3, 1–20.
- Mitchell, W. (1925). Quantitative analysis in economics theory. *American Economic Review* 15, 1–12.
- Pesaran, M. & S. Potter (1992). Nonlinear dynamics and econometrics: An introduction. *Journal of Applied Econometrics* 7, S1–S7.
- Popper, K. (1966). *Of clouds and clocks; an approach to the problem of rationality and the freedom of man*. St. Louis: Washington University.
- Puu, T. (1997). *Nonlinear Economics Dynamics*. Berlin: Springer.
- Ramsey, J.B., C.L. Sayers & P. Rothman (1990). The statistical properties of dimension calculations using small data sets: Some economic applications. *International Economic Review* 31, 991–1020.
- Robinson, J.T. (1933). *The Economics of Imperfect Competition*. Cambridge University Press.
- Robinson, P. (1977). The estimation of nonlinear moving average model. *Stochastic Processes and Their Applications* 5, 81–90.
- Scheinkman, J. & B. LeBaron (1989). Nonlinear dynamics and stock returns. *Journal of Business & Economic Statistics* 62, 311–337.
- Slutsky, E. (1937). The summation of random causes as the source of cyclic processes. *Econometrica*, 5, 105–146.
- Tong, H. & K. Lim (1980). Threshold autoregression, limit cycles, and cyclical data. *Journal of Royal Statistical Society (Series B)* 42, 245–292.

Nonlinear dynamics and chaos theory in economics: a historical perspective

Artem Prokhorov

Concordia University, Montréal, Canada

This essay focuses on the genesis of ideas of nonlinearity, stochastics, and dynamics in economic thought as a series of intellectual advances that connected the linear static (quasi-dynamic) determinism of the 18th–19th centuries with the linear mechanistic systems with stochastic terms and the nonlinear deterministic and stochastic dynamic models of the late 20th century, specifically, the chaos theory. The emphasis is placed on the developments of the second half of the 20th century. Technicalities are avoided.