

квантиль

*международный эконометрический журнал
на русском языке*

**№4
март 2008 г.**

СОДЕРЖАНИЕ ВЫПУСКА

Эконометрический ликбез: непараметрический анализ

Крил Майкл. Некоторые ловушки параметрической инференции	1
Расин Джеффри. Непараметрическая эконометрика: вводный курс	7
Зинде-Уолш Виктория. Отсутствие гладкости при непараметрическом оценивании	57

В помощь изучающим эконометрику

Анатольев Станислав. Оформление эконометрических отчетов	71
----------------------------------------------------------	----

История эконометрики

Прохоров Артем. Нелинейная динамика и теория хаоса в экономической науке: историческая ретроспектива	79
------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

Статьи: прикладная эконометрика

Шилов Андрей, Мёллер Йоахим. Кривая заработных плат: теория и эмпирика	93
------------------------------------------------------------------------	----

Квантиль

№4, март 2008 г.

Сайт в Интернете: <http://quantile.ru>

Адрес электронной почты: quantile@quantile.ru

Доступ к журналу бесплатный и неограниченный

РЕДАКТОР

Станислав Анатольев

Российская Экономическая Школа (Москва, Россия)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Виктория Зинде-Уолш

Университет МакГилл (Монреаль, Канада)

Рустам Ибрагимов

Гарвардский Университет (Кэмбридж, США)

Анна Микушева

Массачусетский Технологический Институт (Кэмбридж, США)

Алексей Онацкий

Колумбийский Университет (Нью-Йорк, США)

Владимир Павлов

Технологический университет Квинсленда (Брисбен, Австралия)

Константин Тюрин

Университет штата Индиана (Блумингтон, США)

Александр Цыплаков

Новосибирский Государственный Университет (Новосибирск, Россия)

Виктор Черножуков

Массачусетский Технологический Институт (Кэмбридж, США)

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Рукописи для публикации в разделе «Статьи» принимаются в электронном виде по адресу submit@quantile.ru. Работы могут принадлежать любой прикладной сфере экономической науки. Главным требованием является интенсивное использование адекватных эконометрических методов. Рукопись должна быть написана на русском (для русскоязычных авторов) или на английском (для остальных авторов) языке в формате *Microsoft Word* или (предпочтительнее) *LaTeX*, и по объему не превышать 30 страниц формата А4 с двойным междустрочным интервалом. Работы подвергаются контролю качества членами редакционного совета и независимыми референтами. Перспективная работа может быть при необходимости возвращена автору на доработку. Редакция также приглашает к сотрудничеству экспертов по эконометрике, готовых внести вклад в методологические рубрики журнала.

При публикации статьи или методологического эссе в журнале «Квантиль» передача авторских прав не происходит ни полностью, ни частично.

Эконометрический ликбез: непараметрический анализ

Некоторые ловушки параметрической инференции*

Майкл Крил[†]

Автономный Университет Барселоны, Барселона, Испания

В эссе рассмотрены некоторые нежелательные последствия, к которым приводит использование параметрических моделей без должного внимания к проверке, правильно ли они специфицированы хотя бы приблизительно. Показано, что непараметрические методы позволяют в определенной степени избежать этих проблем.

Даже несистемный обзор литературы дает понять, что параметрическое моделирование составляет большую часть прикладных эконометрических исследований, и что непараметрические методы используются относительно редко. Почему же параметрические модели так популярны? Этому есть много причин, в том числе:

- (i) параметрические модели обычно довольно просты, а результаты представимы в виде удобных аналитических выражений;
- (ii) параметрические модели обычно легко оценивать численно;
- (iii) параметрические модели часто показывают «общую картину», даже если упускают из вида некоторые детали;
- (iv) параметрические модели статистически эффективны при условии правильной спецификации.

Есть много аргументов в пользу параметрических моделей, несмотря на опасность неверной спецификации и возможность упустить из виду слишком много деталей. Почему непараметрические модели являются относительно непопулярными? В голову приходит несколько причин:

- (i) непараметрические модели зачастую приводят к результатам в виде сложных выражений, часть которых может не иметь явного экономического смысла;
- (ii) непараметрические модели основываются на более слабых предположениях, чем параметрические, и это может привести к потере эффективности/мощности;
- (iii) непараметрические модели часто требуют больших вычислительных затрат;
- (iv) непараметрические модели часто требуют тонкой настройки, и решения касательно этой настройки могут иметь сильное влияние на результаты.

Из всего вышеперечисленного первые две причины являются, вероятно, наиболее серьезными преградами для большей распространенности непараметрических моделей. Вычислительные мощности, доступные экономистам, растут настолько быстро, что вряд ли могут создать серьезные ограничения в исследовании за исключением очень специфических случаев. Основанные на имеющихся данных методы тонкой настройки непараметрических моделей тоже довольно хорошо известны, так что эта часть оценивания может быть в большой степени автоматизирована. Перед тем, как начать слишком сильно защищать непараметрические модели, важно вспомнить, что параметрические модели обычно более просты, легко интерпретируемы и более эффективны, если спецификация модели в большей или меньшей

*Перевод Р. Школлера и С. Анатольева. Цитировать как: Крил, Майкл (2008) «Некоторые ловушки параметрической инференции», Квантиль, №4, стр. 1–6. Citation: Creel, Michael (2008) “Some possible pitfalls of parametric inference,” *Quantile*, No.4, pp. 1–6.

[†]Адрес: Department of Economics and Economic History, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra (Barcelona), Spain. Электронная почта: michael.creel@uab.es

степени правильная. В силу этих причин непараметрические модели лучше всего рассматривать не как замену, а как дополнение к параметрическим.

Существует много литературы, посвященной непараметрическим методам в экономике, в том числе обзоры Hallam (1992), Yatchew (1998) и Расин (2008). Недавно вышедшая книга Li & Racine (2007) собрала воедино множество интересных результатов и является отличным справочником в этом разделе эконометрики. Учитывая избыток источников технической информации, данное эссе всего лишь представляет некоторые простые примеры, показывающие, что излишняя приверженность параметрическим моделям может привести к серьезным ошибкам при inferенции, и что непараметрические методы позволяют этого избежать.

Мы рассмотрим простой пример, показывающий, как параметрическая модель может привести к неверным выводам, если проверке правильной спецификации модели не было уделено должного внимания. Предположим, что данные создаются случайным выбором из (y, x) , где $y = f(x) + \varepsilon$, x равномерно распределен на интервале $(0, 2\pi)$, и ε – классическая ошибка. Пусть истинная регрессионная функция будет

$$f(x) = 1 + \frac{3x}{2\pi} - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2.$$

Задача заключается в оценивании эластичности $f(x)$ по x для всех возможных значений x .

В общем случае эконометрист не знает функциональной формы $f(x)$. Введение предположения о принадлежности $f(x)$ некоторому семейству функций, характеризуемых конечномерным параметром, приводит модель в класс полупараметрических. Одна из возможных идей – разложить $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторого x_0 . Гибкие функциональные формы, такие как трансцендентно-логарифмическая (известная как translog), могут быть проинтерпретированы как разложения Тейлора второго порядка. Ради простоты мы будем работать с разложением Тейлора первого порядка. Разложим в окрестности x_0 :

$$h(x) = f(x_0) + D_x f(x_0)(x - x_0).$$

Если точка разложения $x_0 = 0$, можно записать

$$h(x) = a + bx.$$

Коэффициент a – это значение функции в точке $x = 0$, а коэффициент наклона b – это значение производной в точке $x = 0$.

Если $f(x)$ известна, то можно посчитать значения коэффициентов в разложении Тейлора. Однако $f(x)$ неизвестна. Если эконометрист решил использовать $h(x)$ как параметрическую модель, объясняющую y , то $y = h(x) + \nu$, или $y = a + bx + \nu$. Это пример неверно специфицированной полупараметрической модели. Она является полупараметрической, так как распределение ν не было задано. Ошибка ν включает в себя как случайную ошибку ε , так и остаточный член разложения Тейлора. Модель является неверно специфицированной, так как не существует (a, b) таких, что $f(x) = h(x)$ для всех значений x .

После того, как выбрана параметрическая модель, проблема заключается в выборе значений a и b . Можно попробовать оценивание с помощью МНК. Целевая функция есть

$$s(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - h(x_t))^2.$$

Согласно стандартным выводам касательно предельного поведения эконометрических оценок, предельная целевая функция с точностью до константы имеет вид

$$s_\infty(a, b) = \int_0^{2\pi} (f(x) - h(x))^2 dx.$$

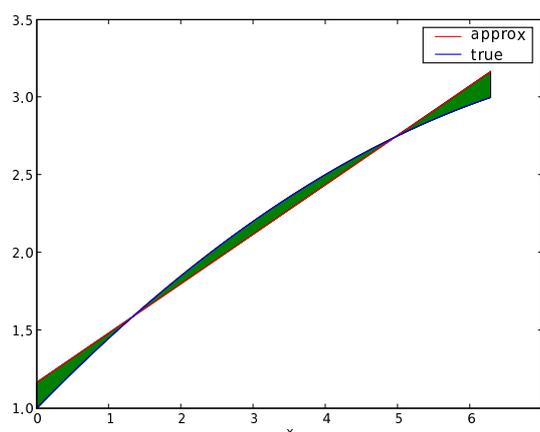


Рис. 1: Истинная и предельная аппроксимирующая функции

МНК-оценки a и b , скажем \hat{a} и \hat{b} , сходятся почти наверное к значениям, минимизирующим предельную целевую функцию. Решение условий первого порядка приводит к выводу, что $s_\infty(a, b)$ достигает минимума в точке $\{a^0 = \frac{7}{6}, b^0 = \frac{1}{\pi}\}$. Оцененная аппроксимирующая функция $\hat{h}(x)$ таким образом сходится почти наверное к

$$h_\infty(x) = 7/6 + x/\pi.$$

На Рис. 1 изображены истинная функция и ее предельная аппроксимация. Разница между этими двумя линиями (затененная область на графике) составляет асимптотическое смещение, которое, как видно, зависит от x .

Обратим внимание на то, что аппроксимирующая модель в общем несостоятельна, даже в точке разложения $x = 0$. Это говорит о том, что «гибкие функциональные формы», основанные на разложении Тейлора, не приводят к состоятельному оцениванию функций в общем случае (White, 1980).

Асимптотически аппроксимирующая модель довольно хорошо «подогнана» под истинную. Это подтверждает тот факт, что неверно специфицированные параметрические модели могут, несмотря ни на что, достаточно хорошо отражать «общую картину». Однако мы заинтересованы в оценивании эластичности функции. Вспомним, что эластичность определяется как отношение предельной функции к ее среднему:

$$\varepsilon(x) = \frac{f'(x)}{f(x)/x}.$$

Хорошая аппроксимация эластичности для всех значений x требует хорошей аппроксимации $f(x)$ и $f'(x)$ для всех значений x . Эластичность, основанная на аппроксимирующей модели, имеет вид

$$\eta(x) = xh'(x)/h(x).$$

На Рис. 2 изображены истинная эластичность и эластичность, полученная из линейной аппроксимирующей модели. Визуально кажется, что эластичность аппроксимирована не так хорошо. Корень из среднеквадратической ошибки аппроксимации эластичности равен

$$\left(\int_0^{2\pi} (\varepsilon(x) - \eta(x))^2 dx \right)^{1/2} = 0,31546.$$

Теперь предположим использование первых членов тригонометрических рядов в качестве аппроксимирующей модели. Причина использования тригонометрических рядов как аппроксимирующей модели обусловлена асимптотическими свойствами гибкой функциональной

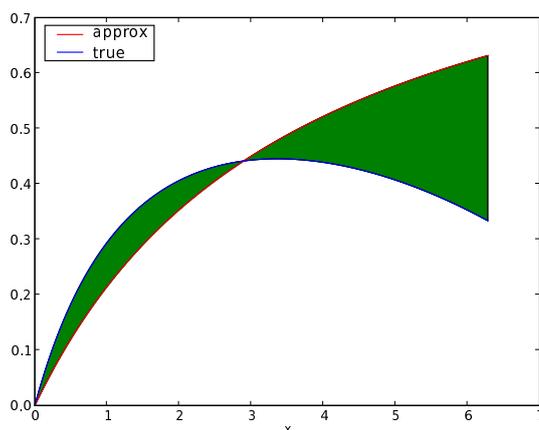


Рис. 2: Истинные и аппроксимирующие эластичности

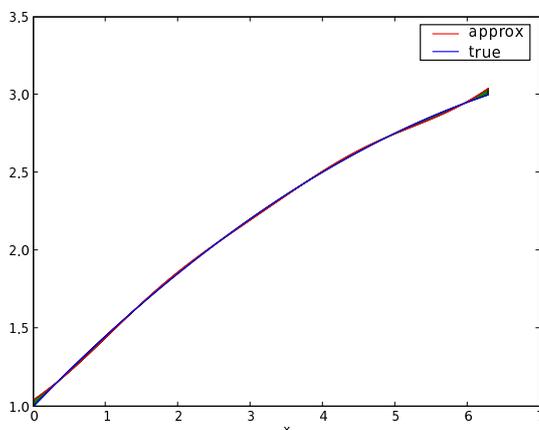


Рис. 3: Истинная функция и более гибкая аппроксимация

формы Фурье (Gallant, 1981), обладающей полупараметрическими свойствами. Это означает, что модель может аппроксимировать неизвестную функцию произвольно хорошо при росте количества членов в разложении до бесконечности. Обычно количество членов в разложении растет вместе с размером выборки. Здесь мы рассмотрим асимптотическое поведение модели с фиксированным количеством членов в разложении, что можно интерпретировать как аппроксимацию поведения оценок в конечных выборках. Рассмотрим набор базисных функций:

$$Z(x) = [1 \quad x \quad \cos(x) \quad \sin(x) \quad \cos(2x) \quad \sin(2x)] .$$

Аппроксимирующая модель имеет вид

$$g_K(x) = Z(x)\alpha .$$

Зафиксировав эти базисные функции при увеличении размера выборки, мы находим,¹ что предельная целевая функция достигает минимума в

$$\left\{ a_1 = \frac{7}{6}, a_2 = \frac{1}{\pi}, a_3 = -\frac{1}{\pi^2}, a_4 = 0, a_5 = -\frac{1}{4\pi^2}, a_6 = 0 \right\} .$$

¹Эти расчеты можно сделать в системе компьютерной алгебры, такой как Maxima, см. <http://maxima.sourceforge.net/>.

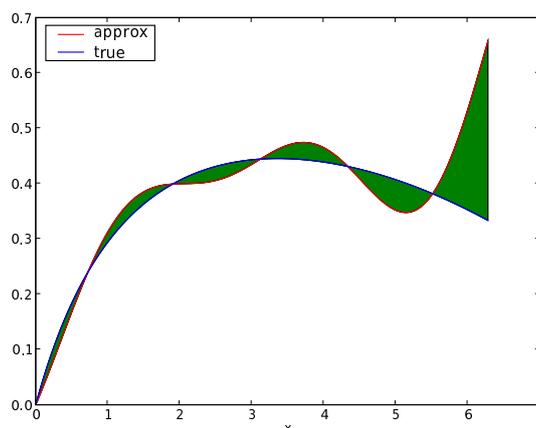


Рис. 4: Истинная эластичность и более гибкая аппроксимация

Подставляя эти значения в $g_K(x)$, мы получаем предельную (в смысле сходимости почти наверное) аппроксимацию

$$g_\infty(x) = 7/6 + x/\pi + (\cos x) \left(-\frac{1}{\pi^2}\right) + (\sin x) 0 + (\cos 2x) \left(-\frac{1}{4\pi^2}\right) + (\sin 2x) 0. \quad (1)$$

На Рис. 3 изображены аппроксимирующая и истинная функции. Усеченная тригонометрическая модель дает однозначно лучшую аппроксимацию, чем линейная модель. На Рис. 4 изображены эластичность более гибкой аппроксимации и эластичность истинной функции. В среднем степень подгонки лучше, несмотря на неправдоподобную волнистость оценки. Корень из среднеквадратической ошибки аппроксимации (RMSE) эластичности равен

$$\left(\int_0^{2\pi} \left(\varepsilon(x) - \frac{g'_\infty(x)x}{g_\infty(x)} \right)^2 dx \right)^{1/2} = 0,16213,$$

практически половине RMSE при использовании разложения первого порядка. Если в тригонометрических рядах бесконечное число членов, эта мера ошибки уйдет в 0 (Gallant, 1981).

Ядерные регрессии, известные также как ядерное сглаживание, являются другим хорошо известным методом непараметрического оценивания. Чтобы оценить эластичность, необходимо численно продифференцировать подогнанные ядром значения, и затем посчитать эластичность. На Рис. 5 показаны усредненные по 100 симуляциям Монте-Карло результаты, основанные на оценивании регрессии с простым Гауссовским ядром и окном Сильвермана. Из графика видно, что этот непараметрический метод дает сравнительно маленькое смещение. Смещение становится больше в окрестности верхнего предела данных, но в других областях оно остается маленьким.

Этот простой пример показывает, что параметрическая модель может привести к неверным выводам, если она в достаточной степени неверно специфицирована. Непараметрические методы, такие как формы Фурье или ядерные регрессии, могут уменьшить смещение при оценивании эластичности функции по сравнению с неверно специфицированной параметрической моделью. Конечно, по мере увеличения размера выборки становится несложно обнаружить неверную спецификацию в простой линейной модели, если для этого приложить усилия. Большие различия в результатах параметрических и непараметрических моделей должны вызвать у исследователя подозрения о неправильной спецификации параметрической модели. К сожалению, этот шаг обычно опускается во многих эмпирических исследованиях.

Важно помнить, что большинство упомянутых выводов и заключений было сделано в терминах асимптотических результатов. Когда размер выборки достаточно мал, непараметрические методы могут приводить к достаточно большой дисперсии, даже если их смещение

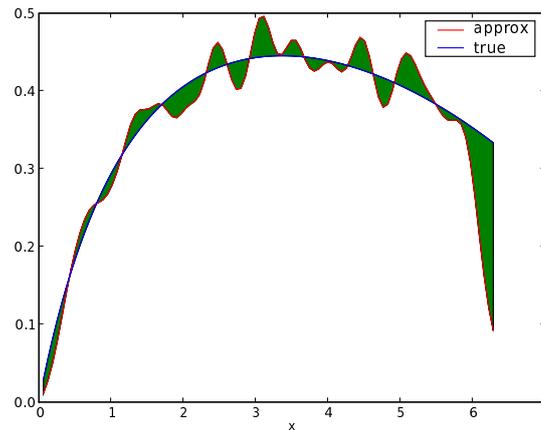


Рис. 5: Истинная эластичность и ядерная регрессионная оценка

меньше по сравнению со смещением неверно специфицированной параметрической модели. В рамках дилеммы выбора между смещением и дисперсией может оказаться, что неверно специфицированная параметрическая модель может оказаться лучше непараметрической. Тем не менее, при росте размера выборки асимптотическое смещение в простой линейной аппроксимирующей модели может привести к отвержению нулевой гипотезы с вероятностью большей, чем выбранный уровень значимости. Непараметрические методы, такие как формы Фурье или ядерное сглаживание, приводят к состоятельному оцениванию регрессионной функции и не приводят к отвержению верной нулевой гипотезы, как при использовании простой линейной аппроксимирующей модели.

Литература

- Расин, Джеффри (2008). Непараметрическая эконометрика: вводный курс. *Квантиль* 4, 7–56.
- Gallant, A.R. (1981). On the bias in flexible functional forms and an essentially unbiased form: The Fourier flexible form. *Journal of Econometrics* 15, 211–245.
- Hallam, A. (1992). A brief overview of nonparametric methods in economics. *Northeastern Journal of Agricultural and Resource Economics* 21, 98–112.
- Li, Q. & J. Racine (2007). *Nonparametric econometrics*. Princeton University Press.
- Yatchew, A. (1998). Nonparametric regression techniques in economics. *Journal of Economic Literature* 36, 669–721.
- White, H. (1980). Using least squares to approximate unknown regression functions, *International Economic Review* 21, 149–70.

Some possible pitfalls of parametric inference

Michael Creel

Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, Spain

This essay reviews some of the undesirable things that can occur when parametric models are used without proper concern for checking that they are at least approximately correctly specified. It shows that nonparametric methods can, to a certain extent, avoid these problems.

Непараметрическая эконометрика: вводный курс^{*}

Джеффри Расин[†]

Университет МакМастер, Гамильтон, Канада

Настоящее эссе является вводным курсом для тех, кто хотел бы познакомиться с непараметрической эконометрикой. Хотя теория, лежащая в основе многих из рассматриваемых методов, может показаться устрашающей для практика, в эссе показано, как применять ряд непараметрических методов весьма непосредственным образом. Вместо энциклопедического покрытия всей области, внимание в эссе ограничено набором основополагающих разделов, а для иллюстративных целей широко используются примеры. Описаны ситуации, когда моделируются данные, состоящие из непрерывных, дискретных или категориальных (номинальных или порядковых) переменных, или любой их комбинации. Также рассматриваются недавние разработки для случаев, когда некоторые из включенных в модель переменных на самом деле могут быть несущественными, что значительно меняет поведение оценок и оптимальной ширины окон по сравнению с общепринятыми подходами.

1 Введение

Непараметрические методы представляют собой статистические приемы, которые не требуют спецификации функциональных форм оцениваемых объектов. Вместо этого данные сами определенным способом формируют модель. В рамках модели регрессии этот подход известен как «непараметрическая регрессия» или «непараметрическое сглаживание». Методы, которые рассматриваются в настоящем эссе, известны как ядерные¹ методы. Подобные методы становятся все более популярными в прикладном анализе данных; они лучше всего подходят для ситуаций, когда имеется большой объем данных, а число участвующих переменных довольно мало. Эти методы часто применяют, если обычные параметрические спецификации оказываются неподходящими для решения поставленной задачи, особенно когда формальное отвержение параметрической модели тестом на правильность спецификации не указывает направление поиска более приемлемой параметрической модели. Привлекательность непараметрических методов в том, что они ослабляют параметрические предположения, накладываемые на процесс, порождающий данные, и позволяют данным самим определить подходящую модель.

Непараметрические и полупараметрические методы привлекли большое внимание статистиков за несколько прошедших десятилетий, что подтверждается обширной статистической литературой на эту тему, в частности, работами Prakasa Rao (1983), Devroye & Györfi (1985), Silverman (1986), Scott (1992), Bickel, Klaassen, Ritov & Wellner (1993), Wand & Jones (1995), Fan & Gijbels (1996), Simonoff (1996), Azzalini & Bowman (1997), Hart (1997), Efromovich (1999), Eubank (1999), Ruppert, Carroll & Wand (2003), Härdle, Müller, Sperlich & Werwatz (2004) и Fan & Yao (2005). Тем не менее, относительно мало работ, нацеленных на потребности прикладных эконометристов; среди таковых на текущий момент нам известны работы Härdle (1990), Horowitz (1998), Pagan & Ullah (1999), Yatchew (2003) и Li & Racine (2007a).

^{*}Перевод Б. Гершмана и С. Анатольева. Цитировать как: Расин, Джеффри (2008) «Непараметрическая эконометрика: вводный курс», Квантиль, №4, стр. 7–56. Citation: Racine, Jeffrey S. (2008) “Nonparametric econometrics: a primer,” *Quantile*, No.4, pp. 7–56.

[†]Адрес: McMaster University, 1280 Main Street West, L8S 4M4, Hamilton, Canada. Электронная почта: racinej@mcmaster.ca

¹Ядро – это просто взвешивающая функция.

Первая опубликованная статья о ядерном оценивании вышла в 1956 г. (Rosenblatt, 1956), а сама идея была предложена в техническом докладе военно-воздушных сил США (USAF) как средство освобождения дискриминантного анализа от необходимости строгой параметрической спецификации (Fix & Hodges, 1951). С того времени данная область испытала экспоненциальный рост и стала неотъемлемой частью учебников бакалаврского уровня (см., например, главу 11 в Johnston & DiNardo, 1997), что свидетельствует о популярности этих методов как среди студентов, так и среди исследователей.

Хотя ядерные методы популярны, они являются лишь одним из многих подходов к построению гибких моделей. Такие подходы включают, например, сглаживание сплайнами, методы ближайших соседей, нейронные сети и гибкие методы сглаживания с помощью рядов. Но в настоящем эссе мы ограничимся классом непараметрических ядерных методов, а также затронем полупараметрические ядерные методы. Мы также сконцентрируемся на более прикладных аспектах этих методов, чтобы удержать объем эссе в разумных пределах; заинтересованный читатель может обратиться к работе Li & Racine (2007a) и к упомянутым выше источникам за подробностями теоретических оснований рассматриваемых методов.

Стоит отметить, что часто приходится слышать две жалобы по поводу непараметрических ядерных методов, а именно: 1) отсутствие соответствующего программного обеспечения и 2) вычислительные трудности, связанные с этими методами. Мы, конечно же, согласны с обеими. Последняя из них неизбежна и лежит, так сказать, в самой природе методов, хотя в разделе *Соображения по поводу вычислений* обсуждаются некоторые возможности. Однако первая проблема постепенно решается, и последние разработки дают надежду на прорыв в вычислительных возможностях. Многие статистические программные пакеты уже содержат некоторые элементарные непараметрические методы (оценивание одномерной плотности, парной регрессии), хотя они часто используют эвристические правила для выбора ширины окна, которые, будучи вычислительно простыми, могут не быть робастными во всех приложениях. Недавно для программной среды R был разработан пакет `np` (R Development Core Team, 2007), который содержит простой в использовании и открытый код для ядерного оценивания; заинтересованный читатель может обратиться за подробностями к работе Hayfield & Racine (2007). Все примеры в данном эссе были реализованы с помощью пакета `np` (код для повторения результатов доступен по запросу).

2 Оценивание плотности и функции вероятности

Обозначения и основные подходы, рассматриваемые в этой главе, представляют основу для остальных глав, и будут использоваться на протяжении всего эссе. В данном разделе дается больше деталей, чем в других, поскольку изрядная доля ключевых понятий, таких как «обобщенное мультипликативное ядро», ядра для категориальных данных, диктуемый данными выбор ширины окна и другие, полезна для понимания дальнейшего материала.

Читатель, несомненно, близко знаком с двумя популярными непараметрическими оценками, а именно: гистограммой и частотной оценкой. Гистограмма является негладким непараметрическим методом, который можно использовать для оценивания функции плотности распределения (ФПР) непрерывной случайной величины. Частотная оценка вероятности – это негладкий непараметрический метод для оценивания вероятности дискретных событий. Хотя негладкие методы могут на самом деле быть мощными, у них есть свои недостатки. Для глубокого изучения ядерного оценивания плотности заинтересованный читатель может обратиться к великолепным монографиям Silverman (1986) и Scott (1992), а для оценивания плотности в случае данных смешанного типа – к работе Li & Racine (2007a) и содержащимся в ней ссылкам на литературу. Начнем с иллюстративного *параметрического* примера.

2.1 Параметрические оценки плотности

Рассмотрим произвольную случайную величину X , имеющую плотность $f(x)$, где $f(\cdot)$ – объект интереса. Предположим, что имеется IID-выборка из неизвестного распределения, и требуется смоделировать его функцию плотности, $f(x)$. Это типичная ситуация, в которой оказывается исследователь-практик.

Для данного примера сгенерируем $n = 500$ реализаций, но тут же «забудем» вид истинного процесса, порождающего данные (DGP), делая вид, будто нам неизвестно, что данные получены из смеси нормальных распределений ($N(-2; 0,25)$ и $N(3; 2,25)$ с одинаковой вероятностью). Затем (наивно) предположим, что данные получены из, скажем, параметрического семейства нормальных распределений, а именно:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)^2 \right\}.$$

Теперь оценим эту модель и получим $\hat{\mu} = 0,56$ и $\hat{\sigma} = 2,71$. Далее, как всегда рекомендуется, проведем тест на правильность спецификации, используя, скажем, тест Шапиро–Уилкса, и получим $W = 0,88$ с р-значением $< 2,2 \times 10^{-16}$, тут же отвергая эту параметрическую модель. Оцененная модель и истинный DGP изображены на Рис. 1.

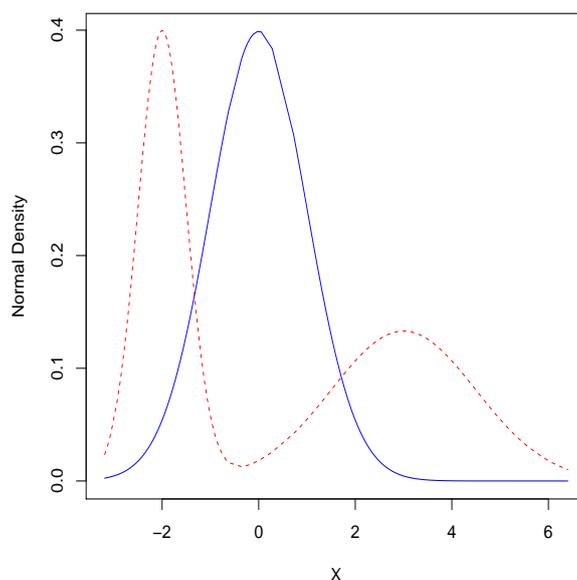


Рис. 1: $N(0,56; 2,71^2)$ -оценка плотности (унимодальная, сплошная линия) и истинный процесс, порождающий данные (бимодальный, пунктирная линия).

Поскольку данная популярная параметрическая модель уверенно отвергается данными, есть две альтернативы, а именно: 1) искать более подходящую параметрическую модель или 2) использовать более гибкие оценки.

В дальнейшем будем предполагать, что читатель оказался именно в такой ситуации. То есть он честно применил параметрический метод и провел ряд тестов на адекватность модели, которые показали, что параметрическая модель не согласуется с DGP. Далее он обращается к более гибким методам оценивания плотности. Заметим, что, хотя в данный момент речь идет об оценивании плотности, точно так же можно было бы обсуждать почти любой параметрический подход, например, регрессионный анализ.

2.2 Гистограммы и ядерные оценки плотности

Построить гистограмму просто. Сначала строится ряд ячеек (возьмем x_0 за начало координат и h за ширину ячейки). Ячейки – это промежутки $[x_0 + mh, x_0 + (m + 1)h)$ для положительных и отрицательных целых чисел m . Гистограмма определяется как

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \frac{\text{количество } X_i \text{ в одной ячейке с } x}{\text{ширина ячейки, содержащей } x} = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}[X_i \text{ в одной ячейке с } x], \quad (1)$$

где $\mathbb{I}[A]$ – индикаторная функция, принимающее значение 1, если A верно, и 0 в противном случае. Исследователь должен выбрать начало координат и ширину ячейки, и получаемая оценка чувствительна к обоим параметрам выбора. Обычно для выбора обоих параметров используются эвристические правила. Хотя данная конструкция является крайне мощной, ее можно значительно улучшить. Гистограмма не является особо эффективной оценкой, говоря статистическим языком. Она разрывна, а значит, любой основанный на ней метод, требующий дифференцирования, будет недоступен в силу этого свойства. К тому же она не центрирована вокруг точки, в которой требуется оценить плотность. Хотя гистограмма является замечательным инструментом, ядерные методы представляют альтернативу, к изучению которой мы приступаем.

Одномерная ядерная оценка плотности была предложена для преодоления многих ограничений, связанных с гистограммой. Она всего-навсего заменяет индикаторную функцию в выражении (1) на ядро, симметричную взвешивающую функцию $K(z)$, обладающую рядом полезных свойств. Замена индикаторной функции в (1) на ядерную функцию дает

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right). \quad (2)$$

Эту оценку часто называют оценкой Розенблатта–Парзена (Rosenblatt, 1956; Parzen, 1962). На Рис. 2 изображены гистограмма и оценка Розенблатта–Парзена для сгенерированных данных из главы 2.1 с шириной окна, полученной по методу подстановки из Sheater & Jones (1991) (см. п. 2.3.2).

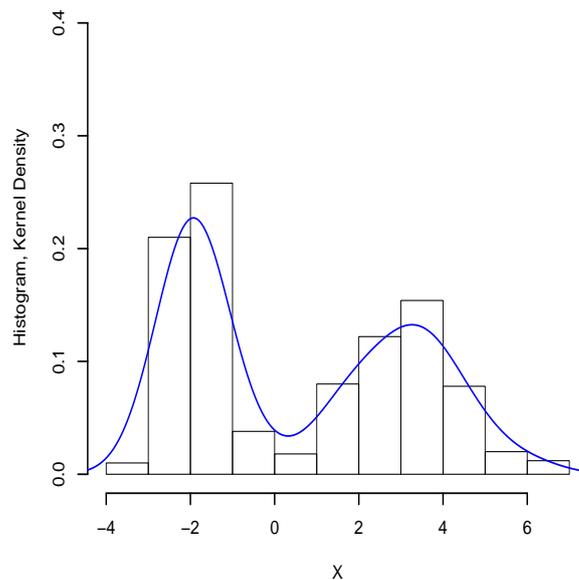


Рис. 2: Гистограмма и ядерная оценка одномерной функции плотности.

Как видно из Рис. 2, и гистограмма, и оценка Розенблатта–Парзена легко раскрывают бимодальную природу данных, в отличие от неправильно специфицированной унимодальной параметрической модели, представленной на Рис. 1. Читатель, сравнив рисунки 1 и 2, сразу заметит, что как гистограмма, так и ядерная оценка, являются *смещенными*, то есть они как бы недооценивают левый пик в конечных выборках, что на самом деле закономерно, как будет видно далее при изучении свойств оценки Розенблатта–Парзена. Но по мере увеличения n и уменьшения h определенным образом, который вскоре будет описан, ядерная оценка сойдется к истинному DGP с единичной вероятностью. Неправильно специфицированная модель никогда не сойдется к истинному DGP. Какой метод дает более адекватное описание DGP – унимодальная параметрическая модель или бимодальная непараметрическая?² Этот вопрос обсуждается ниже в главе 2.7.

Ядерное оценивание кумулятивной функции распределения (КФР) получило гораздо меньше внимания, чем оценивание функции плотности. Заинтересованный читатель может обратиться к основополагающей статье Bowman, Hall & Prvan (1998) и главе 1 в Li & Racine (2007a).

2.2.1 Свойства ядерной оценки одномерной плотности

Предположим, что ядерная функция $K(z)$ неотрицательна и обладает следующими свойствами:

$$\int K(z) dz = 1, \quad \int zK(z) dz = 0, \quad \int z^2K(z) dz = \kappa_2 < \infty.$$

Если не указано иное, нижним и верхним пределами интегрирования будут $-\infty$ и ∞ соответственно. Такое ядро часто называют «ядром второго порядка». Parzen (1962) показал, что можно выбирать ядра, позволяющие снизить поточечное смещение $\hat{f}(x)$, однако для этого необходимо отказаться от неотрицательности $K(z)$. Один из недостатков использования подобных ядер «более высокого порядка»³ при оценивании функции плотности заключается в том, что оценки могут оказаться отрицательными, что, конечно, является нежелательным побочным эффектом. Ядра более высокого порядка иногда встречаются в многомерных случаях для обеспечения скоростей сходимости, необходимых для установления предельных распределений. В дальнейшем по умолчанию используется ядро второго порядка, если не указано иное.

Для оценки свойств многих ядерных методов используется критерий точечной среднеквадратической ошибки (MSE). Чтобы получить выражение для MSE, посчитаем смещение и дисперсию $\hat{f}(x)$. Учитывая, что

$$\text{MSE}[\hat{f}(x)] = \mathbb{E}[\hat{f}(x) - f(x)]^2 = \mathbb{V}[\hat{f}(x)] + (\mathbb{B}[\hat{f}(x)])^2,$$

и используя разложение в ряд Тейлора и замену переменных, получаем асимптотическое смещение

$$\mathbb{B}[\hat{f}(x)] \approx \frac{h^2}{2} f''(x) \kappa_2, \tag{3}$$

и асимптотическую дисперсию

$$\mathbb{V}[\hat{f}(x)] \approx \frac{f(x)}{nh} \int K^2(z) dz. \tag{4}$$

²Возможно, уместным здесь будет высказывание Дж. Бокса о том, что «все модели неправильны, но некоторые полезны» (с. 424 в Dgarreg, 1987).

³Вообще говоря, ядро порядка ν (где $\nu \geq 2$ – целое число) должно удовлетворять следующим свойствам: $\int K(z) dz = 1$, $\int z^l K(z) dz = 0$, ($l = 1, \dots, \nu - 1$) и $\int z^\nu K(z) dz = \kappa_\nu \neq 0$.

См. подробный вывод этих результатов на с. 23–24 в Pagan & Ullah (1999) или с. 11–12 в Li & Racine (2007a).

Заметим, что как смещение, так и дисперсия, зависят от ширины окна (смещение падает, а дисперсия растет по мере уменьшения h). Смещение также возрастает по $f''(x)$, то есть является наибольшим в пиках распределений. Но, если выполнены условия состоятельности, а именно $h \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (смещение $\rightarrow 0$) и $nh \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (дисперсия $\rightarrow 0$), то смещение, связанное с $f''(x)$, уменьшается при увеличении выборки и в пределе исчезает. Отметим, что величину nh иногда называют «эффективным размером выборки», а требование $nh \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ просто означает, что по мере получения большего количества информации ($n \rightarrow \infty$) усреднение происходит по более узкой области ($h \rightarrow 0$), но в то же время количество «локальной информации» (nh) должно увеличиваться.

Приведенные выше формулы для смещения, дисперсии и среднеквадратической ошибки – это *точечные* свойства, то есть они выполняются в любой точке x . Интегральная среднеквадратическая ошибка (IMSE), с другой стороны, агрегирует среднеквадратические ошибки по всей области определения функции плотности, являясь глобальной мерой ошибки, и при подстановке выражений для асимптотического смещения и дисперсии принимает вид

$$\begin{aligned} \text{IMSE}[\hat{f}(x)] &= \int \text{MSE}[\hat{f}(x)] dx = \int \mathbb{V}[\hat{f}(x)] dx + \int (\mathbb{B}[\hat{f}(x)])^2 dx \\ &\approx \int \left[\frac{f(x)}{nh} \int K^2(z) dz + \left(\frac{h^2}{2} f''(x) \kappa_2 \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{nh} \int K^2(z) dz \int f(x) dx + \left(\frac{h^2}{2} \kappa_2 \right)^2 \int [f''(x)]^2 dx = \frac{\Phi_0}{nh} + \frac{h^4}{4} \kappa_2^2 \Phi_1, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Phi_0 = \int K^2(z) dz$, а $\Phi_1 = \int [f''(x)]^2 dx$. См. подробный вывод этого результата на с. 24 в Pagan & Ullah (1999) или с. 13 в Li & Racine (2007a).

Теперь можно минимизировать это выражение по ширине окна и ядерной функции для получения «оптимальной ширины окна» и «оптимального ядра». Это выражение также дает основу для диктуемого данными выбора ширины окна. Отметим, что, используя IMSE вместо MSE, мы выбираем ширину окна, обеспечивающую хорошую оценку «в целом», а не ту, которая хороша лишь для одной точки.

Минимизируя IMSE по h , получаем ширину окна, которая глобально балансирует смещение и дисперсию:

$$h_{opt} = \Phi_0^{1/5} \kappa_2^{-2/5} \Phi_1^{-1/5} n^{-1/5} = \left[\frac{\int K^2(z) dz}{\left(\int z^2 K(z) dz \right)^2 \int [f''(x)]^2 dx} \right]^{1/5} n^{-1/5} = c n^{-1/5}. \quad (6)$$

Заметим, что константа c зависит от $f''(x)$ и $K(\cdot)$, и если $h \propto n^{-1/5}$, то

$$o\left(\frac{1}{nh}\right) = o\left(\frac{1}{n^{4/5}}\right),$$

то есть использование оптимальной ширины окна дает оценку $\hat{f}(x)$, имеющую IMSE порядка $n^{-4/5}$:

$$\hat{f}(x) - f(x) = O_p\left(n^{-2/5}\right).$$

Отметим, что для *правильно специфицированной* параметрической оценки, скажем, $\hat{f}(x, \theta)$, мы бы получили

$$\hat{f}(x, \theta) - f(x) = O_p\left(n^{-1/2}\right),$$

то есть более высокую скорость сходимости, чем в непараметрическом случае, из-за которой подобные модели называют \sqrt{n} -состоятельными. Конечно, если параметрическая модель неверно специфицирована, она не является состоятельной, поэтому Robinson (1988) на с. 933 называет такие модели « \sqrt{n} -несостоятельными».

Получив оптимальную ширину окна, займемся получением оптимальной ядерной функции. Главная задача ядра – обеспечить гладкость и дифференцируемость результирующей оценки. В ином контексте Hodges & Lehmann (1956) впервые показали, что оптимальная с точки зрения IMSE взвешивающая функция имеет вид

$$K_e(z) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} (1 - \frac{1}{5}z^2), & -\sqrt{5} \leq z \leq \sqrt{5}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Этот результат получен с помощью техники вариационного исчисления, его вывод можно найти на с. 27–28 в Pagan & Ullah (1999). В рамках оценивания функции плотности такое ядро впервые предложил Епанечников (Epanchnikov, 1969), поэтому его часто называют ядром Епанечникова. Оказывается, целый ряд ядерных функций приводит к оценкам с той же относительной эффективностью⁴, так что можно выбирать ядро на основе вычислительной сложности; популярным выбором является гауссовское ядро.

В отличие от выбора ядерной функции, выбор подходящей ширины окна является ключевым аспектом корректного непараметрического анализа.

2.3 Выбор ширины окна

Ключом к проведению качественного непараметрического оценивания является выбор подходящей ширины окна для имеющейся задачи. Хотя ядерная функция остается важной, ее главная роль состоит в обеспечении дифференцируемости и гладкости получающейся оценки. Ширина окна, с другой стороны, определяет поведение оценки в конечных выборках, что ядерная функция сделать просто не в состоянии. Существуют четыре общих подхода к выбору ширины окна: 1) референтные эвристические правила, 2) методы подстановки, 3) методы кросс-валидации и 4) бутстраповские методы. Ради аккуратности подчеркнем, что диктуемые данными методы выбора ширины окна не всегда гарантируют хороший результат. Для простоты изложения рассмотрим далее оценку одномерной плотности для непрерывных данных. Модификация для многомерного случая и данных смешанного типа требует незначительных изменений, заинтересованный читатель может обратиться к работе Li & Racine (2003) за подробностями об оценке плотности для данных смешанного типа.

2.3.1 Референтные эвристические правила

Рассмотрим оценку одномерной функции плотности, определенную в (2), с оптимальной шириной окна из (6). Быстрый взгляд на (6) дает понять, что оптимальная ширина окна зависит от соответствующей функции плотности, которая неизвестна. Референтные эвристические правила выбора ширины окна используют стандартное семейство распределений для присвоения значения неизвестной константе $\int f''(z)^2 dz$. Например, в случае семейства нормальных распределений можно показать, что $\int f''(z)^2 dz = \frac{3}{8\sqrt{\pi}\sigma^5}$. Если к тому же использовать гауссовское ядро, то

$$\int K^2(z) dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad \int z^2 K(z) dz = 1,$$

так что оптимальная ширина окна равна

$$h_{opt} = (4\pi)^{-1/10} \left(\frac{3}{8}\right)^{-1/5} \pi^{1/10} \sigma n^{-1/5} = 1,059 \sigma n^{-1/5},$$

⁴См. таблицу 3.1 на с. 43 в Silverman (1986).

откуда происходит правило « $1,06\sigma n^{-1/5}$ ». На практике применяется $\hat{\sigma}$, выборочное стандартное отклонение.

2.3.2 Подстановка

Методы подстановки, такие как в Sheather & Jones (1991), состоят в подстановке оценок неизвестной константы $\int f''(z)^2 dz$ в формулу для оптимальной ширины окна на основе первоначальной оценки $f''(z)$, которая в свою очередь основана на «предварительной» ширине окна, например, найденной по правилу $1,06\sigma n^{-1/5}$. Все прочие константы в выражении для h_{opt} известны после выбора ядерной функции (то есть $\int K^2(z)dz$ и $\int z^2 K(z)dz$ известны). Хотя такие правила популярны, заинтересованный читатель может обратиться к работе Loader (1999), где обсуждаются относительные достоинства методов подстановки по сравнению с другими методами выбора ширины окна, обсуждаемыми ниже.⁵

2.3.3 Кросс-валидация на основе наименьших квадратов

Кросс-валидация на основе наименьших квадратов – это полностью автоматический и диктуемый данными метод выбора сглаживающего параметра. Этот метод основан на принципе выбора ширины окна, минимизирующей интегральную среднеквадратическую ошибку получающейся оценки. Интеграл квадрата разности $\hat{f}(x)$ и $f(x)$ имеет вид

$$\int [\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx = \int \hat{f}(x)^2 dx - 2 \int \hat{f}(x)f(x) dx + \int f(x)^2 dx.$$

Можно заменить эти величины их выборочными аналогами, сделать поправку на смещение и получить целевую функцию, которую затем можно минимизировать с помощью численных методов. Этот подход был предложен в работах Rudemo (1982) и Bowman (1984).

Для понимания сущности комментариев в Loader (1999) на Рис. 3 изображены оценки бимодальной плотности – ядерная оценка при применении правила подстановки и кросс-валидации на основе наименьших квадратов. Рис. 3 показывает, что на самом деле правило подстановки чрезмерно сглаживает, приводя к существенному смещению в левой вершине. Кросс-валидация на основе наименьших квадратов исправляет это, как отмечает Loader (1999), но ценой дополнительной вариации в правой вершине.

Одна из проблем данного подхода – его чувствительность к наличию округленных или дискретизированных данных, а также к мелкомасштабным эффектам в данных.

Из примера следует, что, возможно, ядерную оценку с фиксированным параметром h можно улучшить, и существуют «адаптивные» ядерные оценки, которые позволяют h меняться в точке x или X_i ; см. Abramson (1982) и Breiman, Meisel & Purcell (1977). Эти оценки, однако, способствуют введению ложного шума в оценку плотности. Поскольку метод с фиксированным h доминирует в прикладных исследованиях, продолжим изучать этот подход.

2.3.4 Кросс-валидация на основе правдоподобия

Кросс-валидация на основе правдоподобия дает оценку плотности, имеющую интерпретацию в терминах энтропии, а именно: оценка будет близка к истинной плотности в смысле Кулбака–Лайблера. Кросс-валидация на основе правдоподобия выбирает h , чтобы максимизировать логарифм функции правдоподобия (построенной по всей выборке за исключением

⁵Loader пишет: «Мы обнаруживаем, что свидетельства превосходства методов подстановки гораздо менее убедительны, чем заявлялось ранее. В свою очередь, мы рассматриваем примеры с реальными данными, симуляции и асимптотику. В числе результатов мы находим, что методы подстановки настраиваются произвольным выбором предварительных оценок и склонны к чрезмерному сглаживанию при использовании в сложных задачах сглаживания».

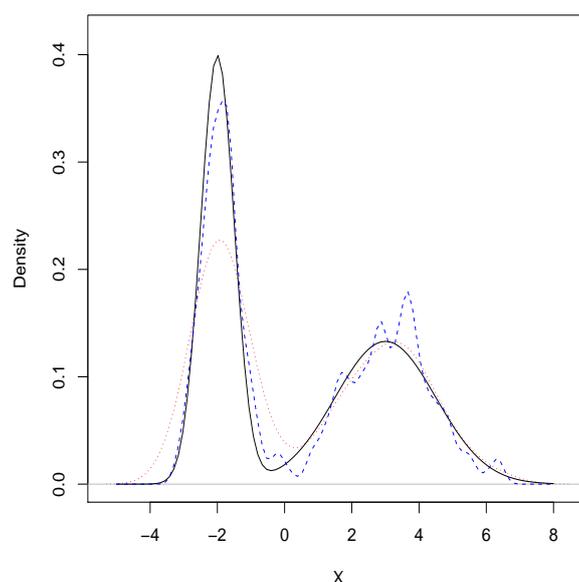


Рис. 3: Оценки плотности: правило подстановки и кросс-валидация на основе наименьших квадратов. Сплошная линия – истинная функция плотности, точечная линия – оценка при методе подстановки, пунктирная – при кросс-валидации на основе наименьших квадратов.

одного наблюдения), имеющей вид

$$\mathcal{L} = \log L = \sum_{i=1}^n \log \hat{f}_{-i}(x),$$

где $\hat{f}_{-i}(x)$ – ядерная оценка $f(X_i)$, построенная по всей выборке за исключением одного наблюдения X_i , то есть

$$\hat{f}_{-i}(x) = \frac{1}{(n-1)h} \sum_{j=1, j \neq i}^n K\left(\frac{X_j - x}{h}\right).$$

Этот метод широко применим и был предложен в Stone (1974) и Geisser (1975). Один из недостатков этого метода в том, что он может давать чрезмерное сглаживание в случае распределений с тяжелыми хвостами, таких как распределение Коши.

2.3.5 Бутстраповские методы

Faraway & Jhun (1990) предложили метод выбора ширины окна h на основе бутстрапа путем оценивания IMSE из (5) для каждой фиксированной ширины окна и затем минимизации по всем значениям. Данный подход использует сглаженный бутстраповский метод на основе начальной оценки плотности. Один из недостатков этого подхода в том, что целевая функция является случайной, что может привести к проблемам при численной минимизации, а также его вычислительная сложность.

2.4 Частотная и ядерная оценки функции вероятности

До сих пор мы рассматривали оценивание одномерной функции плотности, предполагая, что анализируемые данные непрерывны по своей природе. Предположим теперь, что требуется оценить одномерную *функцию вероятности*, а данные дискретны по своей природе.

Непараметрический негладкий подход в данном случае предполагает частотную оценку, тогда как непараметрический гладкий подход дает ядерную оценку, весьма отличающуюся от приведенной в (2). Для незнакомых с термином «частотная» оценка поясним, что это просто оценка вероятности, подсчитанная по выборочной частоте наступления события. Например, если случайная величина – это результат испытания Бернулли (то есть 0 или 1 с постоянной вероятностью в каждом испытании), то частотная оценка вероятности нуля (единицы) – это просто число нулей (единиц), деленное на число испытаний.

Сначала рассмотрим оценивание функции вероятности, определенной для $X_i \in \mathcal{S} = \{0, 1, \dots, c-1\}$. Негладкая «частотная» (неядерная) оценка $p(x)$ имеет вид

$$\tilde{p}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}[X_i, x],$$

где $\mathbb{I}[\cdot]$ – индикаторная функция, определенная выше. Легко показать, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{p}(x)] &= p(x), \\ \mathbb{V}[\tilde{p}(x)] &= \frac{p(x)(1-p(x))}{n}, \end{aligned}$$

а значит,

$$\text{MSE}[\tilde{p}(x)] = n^{-1}p(x)(1-p(x)) = O(n^{-1}),$$

откуда следует, что

$$\tilde{p}(x) - p(x) = O_p(n^{-1/2}).$$

Рассмотрим теперь ядерную оценку $p(x)$,

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l(X_i, x), \tag{7}$$

где $l(\cdot)$ – ядерная функция, определенная, скажем, как

$$l(X_i, x) = \begin{cases} 1 - \lambda & \text{если } X_i = x \\ \lambda/(c-1) & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\lambda \in [0, (c-1)/c]$ – «сглаживающий параметр», или «ширина окна». Требование, чтобы параметр λ лежал в отрезке $[0, (c-1)/c]$ обеспечивает то, что $\hat{p}(x)$ является корректной оценкой вероятности, принадлежащей отрезку $[0, 1]$. Легко показать, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{p}(x)] &= p(x) + \lambda \left(\frac{1 - cp(x)}{c-1} \right), \\ \mathbb{V}[\hat{p}(x)] &= \frac{p(x)(1-p(x))}{n} \left(1 - \lambda \frac{c}{(c-1)} \right)^2. \end{aligned}$$

Эта оценка была предложена в Aitchison & Aitken (1976) для дискриминантного анализа в случае многомерных бинарных данных. См. также Simonoff (1996).

Заметим, что, когда $\lambda = 0$, эта оценка превращается в частотную оценку $\tilde{p}(x)$, а если λ принимает наибольшее допустимое значение, $(c-1)/c$, ядерная оценка становится прямоугольной (то есть дискретной равномерной) оценкой, дающей одинаковые вероятности по всем исходам.

Используя ширину окна, балансирующую смещение и дисперсию, можно показать, что

$$\hat{p}(x) - p(x) = O_p(n^{-1/2}).$$

Заметим, что, в отличие от получения оценки Розенблатта–Парзена, в данном случае вместо приближений нам удалось использовать точные выражения для вывода результатов.

2.5 Ядерное оценивание плотности в случае смешанных дискретных и непрерывных данных

Предположим, в нашем распоряжении смесь дискретных и непрерывных данных, и требуется смоделировать их совместную функцию плотности.⁶ В случае смеси дискретных и непрерывных данных исследователи традиционно используют ядерные методы, прибегая к «частотному» подходу. Этот подход подразумевает разбиение непрерывных данных на подмножества в соответствии с реализациями дискретных данных («клетки»). Конечно, это приводит к состоятельным оценкам. Тем не менее, по мере увеличения числа подмножеств количество данных в каждой клетке уменьшается, что ведет к проблеме «редких данных». В таких случаях данных в каждой клетке может оказаться недостаточно для того, чтобы дать разумные оценки плотности (они будут иметь большую дисперсию).

Подход, который рассматривается далее, использует концепцию «обобщенных мультипликативных ядер». Для непрерывных переменных используются стандартные непрерывные ядра, обозначаемые $W(\cdot)$ (ядро Епанечникова и др.). В случае неупорядоченной дискретной переменной \tilde{x}^d можно использовать ядро из Aitchison & Aitken (1976), имеющее вид

$$\bar{l}(\bar{X}_i^d, \tilde{x}^d) = \begin{cases} 1 - \lambda, & \text{если } \bar{X}_i^d = \tilde{x}^d, \\ \frac{\lambda}{c-1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В случае упорядоченной дискретной переменной \tilde{x}^d можно использовать ядро из Wang & Vanuzin (1981), имеющее вид

$$\tilde{l}(\tilde{X}_i^d, \tilde{x}^d) = \begin{cases} 1 - \lambda, & \text{если } \tilde{X}_i^d = \tilde{x}^d, \\ \frac{(1-\lambda)}{2} \lambda^{|\tilde{X}_i^d - \tilde{x}^d|}, & \text{если } \tilde{X}_i^d \neq \tilde{x}^d. \end{cases}$$

Обобщенное мультипликативное ядро для одной непрерывной, одной неупорядоченной и одной упорядоченной дискретных переменных определяется следующим образом:

$$K(\cdot) = W(\cdot) \times \bar{l}(\cdot) \times \tilde{l}(\cdot). \quad (8)$$

Используя подобные мультипликативные ядра, можно модифицировать любой существующий ядерный метод для случая категориальных переменных, расширяя, таким образом, сферу применения ядерных методов.

Оценивание совместной функции плотности/вероятности, определенной на смешанных данных, осуществляется естественным образом путем применения этих обобщенных мультипликативных ядер. Например, для одной неупорядоченной дискретной переменной \tilde{x}^d и одной непрерывной переменной x^c , ядерная оценка функции плотности имеет вид

$$\hat{f}(\tilde{x}^d, x^c) = \frac{1}{nh_{x^c}} \sum_{i=1}^n \bar{l}(\bar{X}_i^d, \tilde{x}^d) W\left(\frac{X_i^c - x^c}{h_{x^c}}\right).$$

Этот метод естественным образом расширяется на случай смеси упорядоченных, неупорядоченных и непрерывных данных (то есть количественных и качественных переменных). Данная оценка особенно хорошо подходит для случая «редких данных». Чтобы не загромождать страницу обозначениями для формального определения оценки в случае p непрерывных, q упорядоченных и r неупорядоченных переменных, будем считать, что идея, лежащая в основе использования мультипликативных ядер, ясна, а подробности заинтересованный читатель может найти в Li & Racine (2003).

⁶Термин «плотность» подходит для функций распределения, определенных для смеси дискретных и непрерывных переменных. Это мера, определенная на дискретных переменных в соответствующей функции плотности.

Пример для смешанных дискретных и непрерывных данных

Рассмотрим набор данных “wage 1” из учебника Wooldridge (2002), содержащий $n = 526$ наблюдений, и смоделируем совместную функцию плотности двух переменных – непрерывной (“lwage”) и дискретной (“numdep”). Переменная “lwage” – это логарифм среднего почасового заработка индивида. Переменная “numdep” – количество иждивенцев, $(0, 1, \dots)$. Применим кросс-валидацию на основе правдоподобия (см. п. 2.3.4) для выбора ширины окна и получим оценку, представленную на Рис. 4.

Таблица 1: Данные по количеству иждивенцев в наборе данных из статьи Mroz (1987) (“numdep”) ($c = 0, 1, \dots, 6$)

c	n_c
0	252
1	105
2	99
3	45
4	16
5	7
6	2

Заметим, что мы имеем дело со случаем «редких» данных для некоторых клеток (см. таблицу 1), и традиционный подход потребовал бы непараметрической оценки одномерной функции плотности на основе только двух наблюдений в последней клетке ($c = 6$).

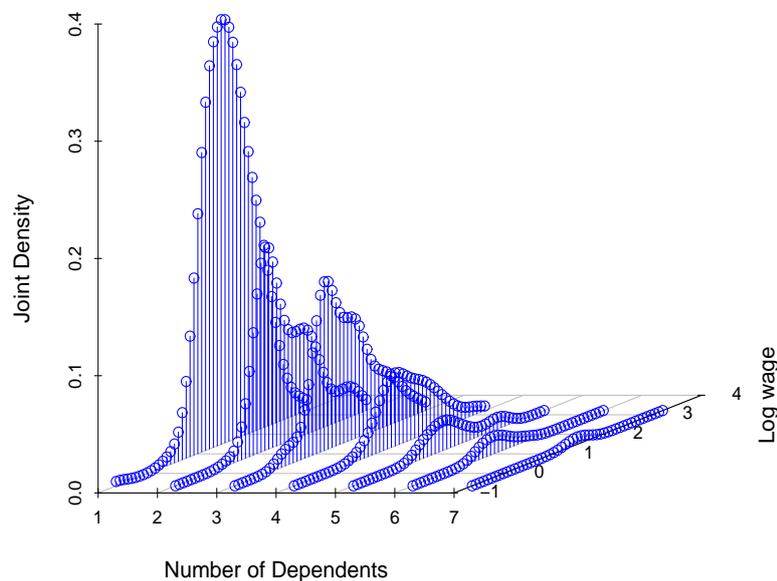


Рис. 4: Непараметрическая ядерная оценка совместной функции плотности, определенной для одной непрерывной и одной дискретной переменной.

2.6 Построение доверительных интервалов

Можно строить точечные и совместные доверительные интервалы для оценки плотности, и это обычно делают, используя либо асимптотическую формулу, приведенную в (4), где

неизвестные компоненты заменяются на их оценки, либо используя методы ресэмплинга, такие как бутстрап. Заметим, что асимптотическую нормальность ядерной оценки можно доказать, применив центральную предельную теорему Ляпунова для двойных массивов.

Точечные доверительные интервалы – это интервалы для фиксированной точки x , имеющие вид

$$\mathbb{P}\{\hat{f}_l(x) < f(x) < \hat{f}_u(x)\} = 1 - \alpha,$$

где α – вероятность ошибки первого рода. Совместные доверительные интервалы, с другой стороны, – это интервалы вида

$$\mathbb{P}\{\cap_{i=1}^n \{\hat{f}_l(X_i) < f(X_i) < \hat{f}_u(X_i)\}\} = 1 - \alpha.$$

Поскольку построение этих двух типов интервалов требует центрирования в $f(x)$, необходима корректировка смещения – либо путем оценки асимптотической формулы из (3), либо с помощью методов ресэмплинга, таких как бутстрап или метод «складного ножа».

С другой стороны, если исследователя интересует лишь оценка дисперсии оценки, доверительный интервал можно центрировать вокруг $\hat{f}(x)$ вместо несмещенной оценки $f(x)$. На Рис. 5 изображена оценка плотности из Рис. 2 и точечные 95%-ые доверительные интервалы (не скорректированные на смещение). Почему же скорректированные на смещение интервалы не являются нормой? Одна из причин в том, что оценка смещения, как известно, очень сложна, и получающиеся скорректированные на смещение оценки могут иметь большую дисперсию; см. подробности о скорректированных на смещение оценках в Efron (1982).

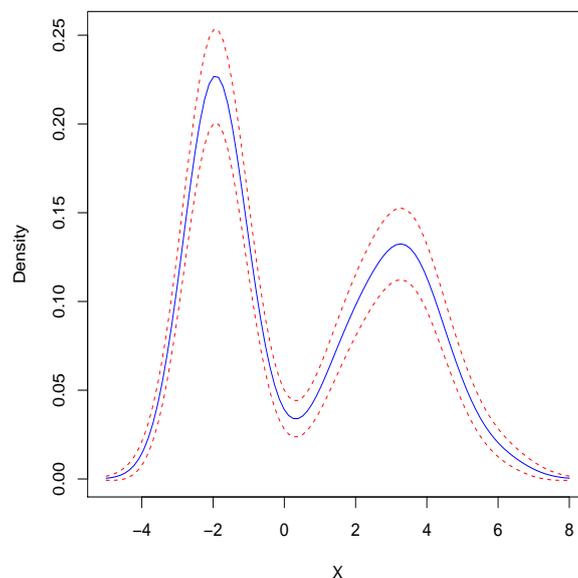


Рис. 5: Ядерная оценка плотности $\hat{f}(x) \pm 1,96 \times s$ с использованием асимптотических стандартных ошибок, s рассчитывается по формуле (4).

2.7 Проклятие размерности

По мере увеличения размерности пространства *непрерывной* переменной скорость сходимости ядерных методов падает, что хорошо известно как проблема «проклятия размерности». Если за p обозначить число непрерывных переменных, на которых определена функция плотности, можно показать, что

$$\hat{f}(x) - f(x) = O_p\left(n^{-2/(p+4)}\right);$$

см. вывод данного результата в случае смешанных данных и кросс-валидации на основе наименьших квадратов в Li & Racine (2003a).

На с. 94 в работе Silverman (1986) представлена часто цитируемая таблица, содержащая размеры выборки, требуемые для обеспечения размера относительной среднеквадратической ошибки *правильно специфицированной параметрической оценки (многомерной нормальной)* по сравнению с многомерной ядерной оценкой плотности (только для непрерывных данных) менее 0,1 при оценивании в многомерном среднем, при определении относительной среднеквадратической ошибки как $\mathbb{E}[\hat{f}(\mu) - f(\mu)]^2 / f(\mu)^2$, использовании гауссовского ядра и подсчете оптимальной поточечной ширины окна. Эту таблицу часто приводят те, кто из нее делают вывод, что ядерные методы бесполезны, когда размерность превышает две или три переменные.

Хотя, конечно, таблица в Silverman (1986) является верной, вывод о бесполезности ядерных методов в случае, когда размерность превышает несколько переменных, отсюда не следует по двум простым причинам. Во-первых, популярные параметрические модели редко, если вообще когда-либо, правильно специфицированы.⁷ Конкуренция, таким образом, идет между *неправильно специфицированными*, а значит, *несостоятельными* параметрическими моделями и относительно *неэффективными*, но *состоятельными* непараметрическими моделями.⁸ Во-вторых, проклятие размерности применимо лишь к числу имеющихся *непрерывных* переменных. В прикладных исследованиях не являются редкими случаи, когда анализируется небольшое число непрерывных переменных, или же часто данные состоят исключительно из категориальных переменных.

3 Оценивание условной плотности

Функции условной плотности лежат в основе многих важных статистических объектов, хотя их редко моделируют напрямую в рамках параметрических моделей и, возможно, еще реже в рамках ядерного оценивания. Тем не менее, как будет видно, они чрезвычайно полезны для целого ряда задач, будь то прямое оценивание функций условной плотности, моделирование счетных данных (см. детальное рассмотрение моделей счетных данных в Cameron & Trivedi, 1998), или же моделирование условных квантилей путем оценивания условной КФР. И, конечно, регрессионный анализ (то есть моделирование условного среднего) напрямую зависит от функции условной плотности, так что этот статистический объект на самом деле неявно составляет основу многих популярных статистических методов.

3.1 Ядерное оценивание функции условной плотности

Пусть $f(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$ обозначают совместную и маргинальную плотности (X, Y) и X соответственно, где Y и X могут быть непрерывными, неупорядоченными и упорядоченными переменными. Далее будем считать Y зависимой переменной (то есть Y – объясняемая переменная), а X – независимой (то есть X – объясняющая переменная). Введем обозначения \hat{f} и $\hat{\mu}$ для соответствующих ядерных оценок, и оценим условную плотность $g(y|x) = f(x, y)/f(x)$ как

$$\hat{g}(y|x) = \hat{f}(x, y) / \hat{f}(x). \quad (9)$$

Ядерные оценки совместной и маргинальной плотностей $f(x, y)$ и $f(x)$ описаны в предыдущей главе и не воспроизводятся здесь; см. подробности теоретических оснований диктуемого данными выбора ширины окна для этого метода в Hall, Racine & Li (2004).

⁷«Нормальность – это миф; никогда не было и никогда не будет нормального распределения» (Geary, 1947).

⁸Robinson (1988) называет параметрические модели \sqrt{n} -несостоятельными (обычно их называют \sqrt{n} -состоятельными), чтобы подчеркнуть это явление.

3.1.1 Наличие несущественных регрессоров

Hall, Racine & Li (2004) предложили оценку, приведенную в (9), но выбор подходящих параметров сглаживания в рамках этого подхода может быть сложен, не в последнюю очередь потому, что правила подстановки принимают особенно сложный вид в случае смешанных данных. Одна из сложностей состоит в том, что не существует общей формулы для оптимальных параметров сглаживания. Гораздо более серьезная проблема состоит в том, что может быть сложно определить, какие компоненты X существенны для задачи условной инференции. Например, если j -ая компонента X независима от Y , то она несущественна для оценки плотности Y при данном X , и в идеале должна быть удалена перед осуществлением инференции. Hall, Racine & Li (2004) показывают, что кросс-валидация на основе наименьших квадратов преодолевает эти трудности. Она автоматически определяет, какие компоненты существенны, а какие – нет, путем присвоения больших параметров сглаживания последним и, следовательно, сжимая их в сторону равномерного распределения. Эта процедура эффективно устраняет несущественные компоненты из анализа, удаляя их вклад в дисперсию оценки; смещение их и так очень мало вследствие их независимости от Y . Кросс-валидация также дает важную информацию о том, какие компоненты существенны: это именно те компоненты, которые процедура кросс-валидации выбрала сглаживать обычным способом, присвоив им параметры сглаживания обычного размера. Кросс-валидация дает асимптотически оптимальное сглаживание для существенных параметров и устраняет несущественные компоненты путем чрезмерного сглаживания.

Важность этого результата лучше всего видна при сравнении условий состоятельности, приведенных в п. 2.2.1, где упомянуты стандартные результаты для оценивания плотности: $h \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (смещение $\rightarrow 0$) и $nh \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (дисперсия $\rightarrow 0$). Hall, Racine & Li (2004) показывают, что для несущественных переменных в X соответствующая ширина окна должна вести себя в точности противоположным образом, а именно: $h \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ при оптимальном сглаживании. То же самое было показано в рамках регрессионного анализа; см. дальнейшие подробности в Hall, Li & Racine (в печати).

3.1.2 Моделирование панельных данных по ВВП Италии

Рассмотрим панельные данные по динамике ВВП Италии (использованные Giovanni Baiocchi) для 21 региона за период 1951–1998 гг. (в млн. лир, базисный год – 1990). Панель содержит 1008 наблюдений и две переменные – “gdp” (ВВП) и “year” (соответствующий год). Исходя из природы данных, будем считать ВВП непрерывной переменной, а год (1951, 1952, ...) – упорядоченной дискретной переменной. Далее оценим плотность распределения ВВП условно на год. На Рис. 6 изображена оценка условной плотности, $\hat{f}(\text{gdp}|\text{year})$ при выборе ширины окна с помощью кросс-валидации на основе правдоподобия, которая дала ширину окна $\hat{h}_{\text{gdp}} = 0,715$ для ВВП и $\hat{\lambda}_{\text{year}} = 0,671$ для года.

Из Рис. 6 видно, что распределение дохода трансформировалось из унимодального в начале 1950-х годов в четко выраженное бимодальное в 1990-х. Данный результат устойчив к выбору ширины окна и наблюдается независимо от того, применяются ли простые эвристические правила или же диктуемые данными методы, такие как кросс-валидация на основе наименьших квадратов или правдоподобия. Ядерный метод сразу раскрывает эту тенденцию, которую легко упустить при применении параметрических моделей распределения дохода. Например, (унимодальное) логнормальное распределение является популярной параметрической моделью для распределений дохода, но она неспособна раскрыть мультимодальную структуру, имеющуюся в данных.

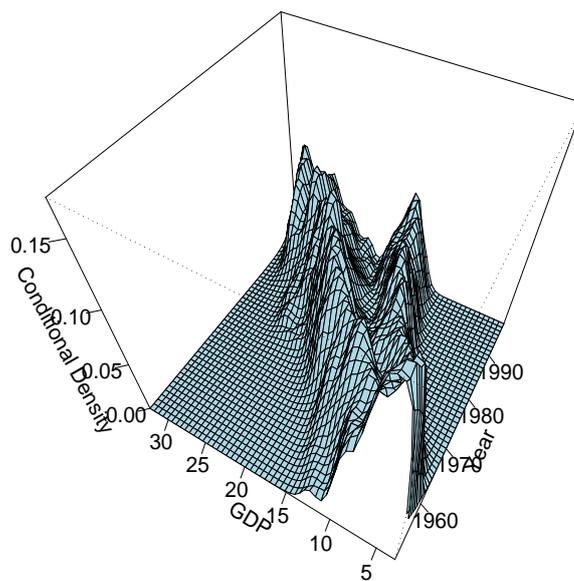


Рис. 6: Непараметрическая оценка функции условной плотности для панельных данных по ВВП Италии.

3.2 Ядерное оценивание функции условного распределения

Li & Racine (в печати) предложили непараметрическую ядерную оценку функции условного распределения, подходящую для смешанных дискретных и категориальных данных, а также соответствующую непараметрическую оценку условного квантиля. Выбор ширины окна для ядерной квантильной регрессии остается открытым вопросом, и авторы используют модификацию метода выбора ширины окна на основе функции условной плотности, предложенного в Hall, Racine & Li (2004).

Пусть $F(y|x)$ – функция условного распределения Y при $X = x$, а $f(x)$ – функция маргинальной плотности X . Можно оценить $F(y|x)$ как

$$\hat{F}(y|x) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n G\left(\frac{y-Y_i}{h_0}\right) K_h(X_i, x)}{\hat{f}(x)}, \quad (10)$$

где $G(\cdot)$ – ядерная функция распределения, выбранная исследователем, скажем, функция стандартного нормального распределения, h_0 – параметр сглаживания, соответствующий Y , а $K_h(X_i, x)$ – мультипликативное ядро, определенное в (8), где ради простоты обозначений каждое одномерное непрерывное ядро поделено на соответствующую ширину окна.

На Рис. 7 представлена эта оценка для данных по ВВП Италии из п. 3.1.2.

Функция условного распределения, представленная на Рис. 7, предоставляет информацию, содержащуюся на Рис. 6, только способом, более удобным для оценивания, скажем, функции условной квантили, к рассмотрению которой мы переходим.

3.3 Ядерное оценивание условной квантили

Оценивание функций регрессии – популярное занятие среди практиков. Иногда, однако, регрессионная функция не отражает влияние объясняющих переменных на зависимую. Например, если зависимая переменная является цензурированной слева (или справа), зависимость, отражаемая регрессионной функцией, искажается. В таких случаях условные квантили выше (или ниже) точки цензурирования являются устойчивыми к наличию цензурирования.

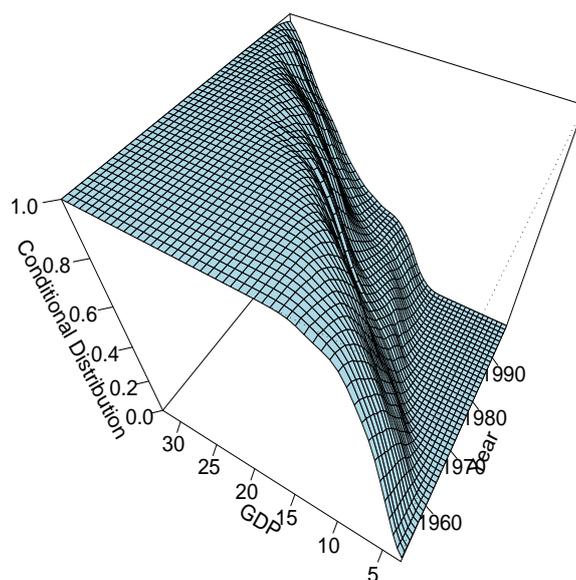


Рис. 7: Непараметрическая оценка функции условного распределения для панельных данных по ВВП Италии.

Более того, функция условной квантили дает более полную картину условного распределения зависимой переменной, чем функция условного среднего.

Если мы умеем оценивать функцию условного распределения, такую как представлена на Рис. 7, оценивание условных квантилей следует естественным образом. То есть, оценив функцию условного распределения, нужно просто обратить ее в нужной квантили, как описывается ниже. Условная α -квантиль ($\alpha \in (0, 1)$) функции условного распределения $F(\cdot|x)$ определяется как

$$q_\alpha(x) = \inf\{y : F(y|x) \geq \alpha\} = F^{-1}(\alpha|x).$$

Или, что эквивалентно, $F(q_\alpha(x)|x) = \alpha$. Можно прямо оценить функцию условной квантили $q_\alpha(x)$, обращая оцененную функцию условного распределения, то есть

$$\hat{q}_\alpha(x) = \inf\{y : \hat{F}(y|x) \geq \alpha\} \equiv \hat{F}^{-1}(\alpha|x).$$

Теоретические подробности этого метода можно найти в Li & Racine (в печати).

На Рис. 8 представлены 0,25, 0,50 (медиана) и 0,75 условные квантили для данных по ВВП Италии из п. 3.1.2, совместно с блочными диаграммами⁹ исходных данных. Приятные особенности данного примера в том, что объясняющая переменная является упорядоченной, и имеется несколько наблюдений за год. Негладкие оценки квантилей, полученные с помощью блочных диаграмм, можно напрямую сравнить с полученными прямым оцениванием гладкой функции распределения, и очевидно, что эти оценки согласуются.

⁹ Диаграмма «ящик с усами» (box-and-whisker plot), иногда называемая просто блочной или ящичковой диаграммой (box plot) – это метод визуализации данных наподобие гистограммы, изобретенный Дж. Тьюки (J. Tukey). Для создания диаграммы «ящик с усами» следует нарисовать ящик с концами в первой и третьей квартилях распределения, Q_1 и Q_3 . Далее рисуется статистическая медиана M в виде горизонтальной линии внутри ящика. Затем рисуются «усы» к наиболее дальним точкам, не являющимся выбросами (то есть расположенным внутри интервала, равного $3/2$, помноженным на расстояние между квартилями Q_1 и Q_3). Затем для каждой точки, находящейся на расстоянии более $3/2$, помноженном на межквартильный интервал, от конца ящика, рисуется точка.

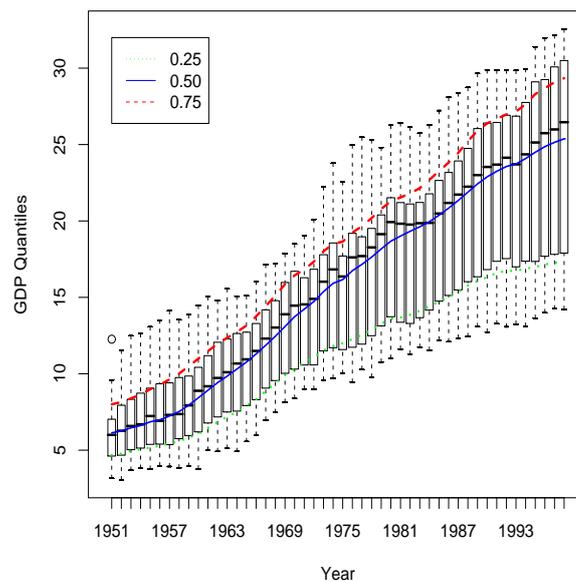


Рис. 8: Непараметрические оценки условных квантилей для панельных данных по ВВП Италии, $\alpha = (0,25, 0,50, 0,75)$.

3.4 Модели бинарного выбора и счетных данных

Другим приложением ядерного оценивания плотностей для смешанных данных является оценивание моделей условной моды. Для примера рассмотрим какую-нибудь дискретную величину, скажем, $Y \in \mathcal{S} = \{0, 1, \dots, c - 1\}$, которая обозначает число успешных заявок на получение патента. Определим условную моду распределения $y|x$ как

$$m(x) = \max_y g(y|x). \quad (11)$$

Для оценивания условной моды $m(x)$ необходимо смоделировать условную плотность. Обозначим за $\hat{m}(x)$ оценку условной моды, имеющую вид

$$\hat{m}(x) = \max_y \hat{g}(y|x), \quad (12)$$

где $\hat{g}(y|x)$ – ядерная оценка $g(y|x)$, определенная в (9). Рассмотрим в качестве примера моделирование низкого веса при рождении (бинарного показателя), используя этот метод.

Моделирование низкого веса при рождении (0/1)

Для этого примера возьмем данные о весе при рождении из библиотеки MASS (Venables & Ripley, 2002) программной среды R и оценим параметрическую логит-модель и непараметрическую модель условной моды, используя (12), где условная плотность оценивается по формуле (9) на основе метода Hall, Racine & Li (2004). Затем сравниваем их таблицы расхождения¹⁰ и оцениваем их классификационную способность. Исход y – бинарный показатель низкого веса новорожденного ребенка (“low”), определяемый ниже. Этот метод можно без изменений применять к неупорядоченным и упорядоченным мультиномиальным исходам. Данный пример содержит $n = 189$ наблюдений и 7 объясняющих переменных в векторе x – “smoke”, “race”, “ht”, “ui”, “ftv”, “age”, и “lwt” – определяемых ниже.

Переменные означают следующее:

¹⁰ «Таблица расхождения» – это таблица реальных исходов и предсказанных моделью. Диагональные элементы содержат верно предсказанные исходы, а внедиагональные – неверно предсказанные.

1. “low” – индикатор веса при рождении менее 2,5 кг
2. “smoke” – индикатор курения во время беременности
3. “race” – расовая принадлежность матери (1 = белая, 2 = черная, 3 = другая раса)
4. “ht” – история гипертонии
5. “ui” – наличие раздражительности в утробе
6. “ftv” – количество визитов к врачу в течение первого триместра
7. “age” – возраст матери, в годах
8. “lwt” – вес матери в фунтах во время последнего менструального периода

Заметим, что все переменные, кроме “age” и “lwt”, по своей природе являются категориальными.

Рассчитаем таблицы расхождения для каждой модели, используя кросс-валидацию на основе правдоподобия для получения ширины окна в непараметрической модели условной моды.

Таблица 2: Таблицы расхождения для данных о низком весе при рождении. В таблице слева представлен результат для параметрической логит-модели, справа – для ядерной модели.

		Предсказано				Предсказано	
		0	1			0	1
Реально	0	119	11	Реально	0	127	1
	1	34	25		1	27	32

Как видно, непараметрическая модель верно классифицирует $(127 + 32)/189 = 84,1\%$ наблюдений с низким/высоким весом при рождении, тогда как логит-модель правильно классифицирует лишь $(119 + 25)/189 = 76,1\%$ наблюдений.

4 Регрессия

Один из наиболее популярных методов непараметрической ядерной оценки регрессии был предложен в Nadaraya (1965) и Watson (1964) и известен как оценка Надарай-Уотсона, а также как «локально постоянная» оценка по причинам, которые станут ясны при описании «локально полиномиальной» оценки (Fan, 1992). Начнем с краткого введения в метод локально постоянного оценивания регрессионных функций и их производных, а затем приступим к локально полиномиальной регрессии. Напомним, что дальнейший материал основан на многих объектах, рассмотренных в разделах *Оценивание плотности и функции вероятности* и *Оценивание условной плотности*, таких как обобщенное мультипликативное ядро и др.

4.1 Локально постоянная ядерная регрессия

Ради простоты обозначений начнем с рассмотрения парной регрессии.¹¹

¹¹Как будет видно, случай многомерных смешанных данных вытекает естественным образом; о необходимых модификациях будет сказано в соответствующих разделах.

4.1.1 Локально постоянная оценка условного среднего ($\hat{g}(x)$)

По определению, условное среднее непрерывной случайной величины Y равно

$$g(x) = \int y g(y|x) dy = \int y \frac{f(y, x)}{f(x)} dy = \frac{m(x)}{f(x)},$$

где $g(y|x)$ – функция условной плотности, определенная в главе *Оценивание условной плотности*, а $m(x) = \int y f(y, x) dy$.

Локально постоянная оценка условного среднего получается заменой неизвестных функций плотности совместного и маргинального распределений, $f(y, x)$ и $f(x)$, их ядерными оценками, определенными в главе *Оценивание плотности и функции вероятности*, что дает

$$\hat{g}(x) = \int y \frac{\hat{f}(y, x)}{\hat{f}(x)} dy.$$

После незначительных преобразований локально постоянная оценка $\hat{g}(x)$ упрощается до

$$\hat{g}(x) = \int y \frac{\hat{f}(y, x)}{\hat{f}(x)} dy = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{X_i - x}{h_x}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h_x}\right)}. \quad (13)$$

Заметим, что знак интеграла исчезает из-за использования мультипликативной ядерной функции и замены переменной.

Заметим, что при условиях, которые будут даны далее, $\hat{g}(x)$ является состоятельной оценкой условного среднего. В сущности, мы локально усредняем те значения зависимой переменной, которые «близки» в смысле значений, принимаемых регрессорами. Контролируя объем локальной информации, используемой для построения оценки («размер локальной выборки»), позволяя локальному усреднению становиться более информативным по мере увеличения размера выборки и в то же время уменьшая окрестность, в которой происходит усреднение, можно обеспечить состоятельность оценок при стандартных условиях регулярности.

4.1.2 Асимптотическое смещение и дисперсия

Хотя локально постоянная оценка широко используется, она подвержена «смещению на краях», что легко увидеть при рассмотрении формулы для асимптотического смещения, которая в двумерном случае имеет вид

$$h^2 \left(\frac{1}{2} g''(x) + \frac{g'(x) f'(x)}{f(x)} \right) \kappa_2$$

(см. вывод на с. 101 в Pagan & Ullah, 1999). При прочих равных, по мере приближения к границе носителя распределения данных, $f(x)$ стремится к нулю и смещение растет. Класс локально полиномиальных оценок, рассматриваемый в главе 4.2 ниже, не подвержен смещению на краях, хотя для него свойственны проблемы, связанные с численной нестабильностью, которые вскоре будут описаны. Асимптотическое смещение локально линейной оценки имеет вид

$$\frac{h^2}{2} g''(x) \kappa_2,$$

и, как легко видеть, член, ведущий к смещению на краях в выражении для локально постоянной оценки, а именно $g'(x) f'(x) / f(x)$, отсутствует в случае локально линейной оценки.

В главе 4.2 описывается локально линейная оценка для двумерного случая, а здесь мы отметим лишь, что локально постоянная и локально линейная оценки имеют одинаковую асимптотическую дисперсию, которая в двумерном случае имеет вид

$$\frac{\sigma^2(x)}{f(x)nh} \int K^2(z) dz,$$

где $\sigma^2(x)$ – условная дисперсия y .

4.1.3 Оптимальная и диктуемая данными ширина окна

Оптимальная с точки зрения IMSE ширина окна для локально постоянной оценки,

$$h_{opt} = \left[\frac{\sigma^2(x) \int f^{-1}(x) dx \int K^2(z) dz}{\int [2g'(x)f'(x)f^{-1}(x) + g''(x)]^2 dx \kappa_2^2} \right]^{1/5} n^{-1/5},$$

выводится точно таким же способом, как и в п. 2.2.1, и, как и в случае оценивания плотности, зависит от неизвестных величин, определяемых процессом, порождающим данные.

Хотя можно применить методы подстановки, в многомерном случае они недостижимы из-за необходимости оценивания, среди прочего, производных высших порядков наряду со смешанными частными производными, тогда как для случая смешанных данных вообще не существует общих формул. На практике применяются альтернативные диктуемые данными подходы.

Два популярных диктуемых данными подхода к выбору ширины окна, обладающему желаемыми свойствами, – это кросс-валидация на основе наименьших квадратов и AIC_c-метод из Hurvich, Simonoff & Tsai (1998), основанный на минимизации модифицированного информационного критерия Акаике.

Кросс-валидация на основе наименьших квадратов для регрессии основана на минимизации функции

$$CV(h) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{g}_{-i}(X_i))^2,$$

где $\hat{g}_{-i}(X_i)$ – оценка $g(X_i)$ при удалении из выборки i -го наблюдения перед формированием прогноза для наблюдения i .

Подход в Hurvich, Simonoff & Tsai (1998) основан на минимизации

$$AIC_c = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{1 + \text{tr}(H)/n}{1 - (\text{tr}(H) + 2)/n},$$

где

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Y_i - \hat{g}(X_i)]^2 = Y'(I - H)'(I - H)Y/n,$$

$\hat{g}(X_i)$ – непараметрическая оценка, а H – $n \times n$ взвешивающая функция (то есть матрица ядерных весов) с элементом (i, j) , имеющим вид $H_{ij} = K_h(X_i, X_j) / \sum_{l=1}^n K_h(X_i, X_l)$, где $K_h(\cdot)$ – обобщенное мультипликативное ядро.

Доказано, что кросс-валидация и AIC_c-метод асимптотически эквивалентны; см. подробности в Li & Racine (2004).

4.1.4 Существенные и несущественные регрессоры

Для существенного x условия на состоятельность те же самые, что и при оценке плотности, а именно: $h \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $nh \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Однако, если на самом деле x не является существенным, можно показать, что условие $h \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а не $h \rightarrow 0$, дает оптимальное сглаживание. Доказано, что применение кросс-валидации на основе наименьших квадратов для выбора ширины окна ведет к оптимальному сглаживанию как для существенных, так и для несущественных x ; подробности см. в Hall, Li & Racine (2006).

Для локально постоянной оценки условного среднего величины y при $h \rightarrow \infty$ имеем

$$\hat{g}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K(0)}{\sum_{i=1}^n K(0)} = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i = \bar{y},$$

что есть безусловное среднее y . В таком случае говорится, что x «полностью сглаживается» из регрессионной функции, что разумно в случае, когда x не содержит полезной информации для предсказания y .

Интуиция, стоящая за желательностью полного сглаживания несущественных регрессоров, весьма проста. Присутствие несущественного x означает, что смещение $\hat{g}(x)$ равно нулю при любом значении h . Значит, можно использовать относительно малые значения h , но оценки с относительно малыми h обязательно будут более вариабельны, чем оценки с относительно большим h . Поскольку кросс-валидация дает аппроксимацию для MSE оценки, ясно, что MSE в этом случае минимизируется, если минимизируется дисперсия $\hat{g}(x)$, что имеет место при таком h , когда $\hat{g}(x) = \bar{y}$, то есть при $h \rightarrow \infty$. Повторим, что кросс-валидация способна дать подходящее значение h как в случае существенных, так и в случае несущественных регрессоров. Наконец, заметим, что скорость сходимости локально постоянной ядерной оценки при использовании оптимального сглаживания (обратно) пропорциональна \sqrt{n} при наличии несущественных регрессоров, что соответствует параметрической скорости, тогда как в случае существенных регрессоров скорость сходимости пропорциональна $\sqrt{n^{4/5}}$ при использовании ядер второго порядка, то есть более низкая, чем параметрическая. Этот факт, возможно, ценится меньше, чем того заслуживает, и имеет важные выводы для автоматического снижения размерности в многомерном случае, что способно смягчить проблему проклятия размерности в некоторых ситуациях.

Расширение на случай множественной регрессии вытекает естественным образом, а версия для случая смешанных данных получается простой заменой ядра на обобщенное мультипликативное ядро, определенное в главе *Оценивание плотности и функции вероятности*; см. теоретические основания этого метода в Racine & Li (2003).

4.1.5 Локально постоянная оценка отклика ($\hat{\beta}(x)$)

Вдобавок к оценке условного среднего часто требуется оценить маргинальные эффекты («производные», или «отклик»).

Неизвестный отклик $\beta(x)$ в двумерном случае, рассмотренном выше, определяется следующим образом:

$$\beta(x) \equiv \frac{dg(x)}{dx} = g'(x) = \frac{f(x)m'(x) - m(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{m'(x)}{f(x)} - g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Локально постоянная оценка получается заменой неизвестных $f(x)$, $m'(x)$, $g(x)$ и $f'(x)$ их ядерными оценками и имеет вид

$$\hat{\beta}(x) \equiv \frac{d\hat{g}(x)}{dx} = \frac{\hat{f}(x)\hat{m}'(x) - \hat{m}(x)\hat{f}'(x)}{\hat{f}^2(x)} = \frac{\hat{m}'(x)}{\hat{f}(x)} - \hat{g}(x) \frac{\hat{f}'(x)}{\hat{f}(x)},$$

где

$$\begin{aligned}\hat{m}(x) &= \frac{1}{nh} \sum_i Y_i K\left(\frac{X_i - x}{h}\right), \\ \hat{f}(x) &= \frac{1}{nh} \sum_i K\left(\frac{X_i - x}{h}\right), \\ \hat{m}'(x) &= -\frac{1}{nh^2} \sum_i Y_i K'\left(\frac{X_i - x}{h}\right), \\ \hat{f}'(x) &= -\frac{1}{nh^2} \sum_i K'\left(\frac{X_i - x}{h}\right).\end{aligned}$$

Вновь многомерная версия вытекает естественным образом, а в случае смешанных данных применяются обобщенные мультипликативные ядра, определенные выше, и, конечно, эта оценка определена только для непрерывных регрессоров.

4.2 Локально полиномиальная ядерная регрессия

Оценка, приведенная в (13), называется локально постоянной оценкой, поскольку она минимизирует следующее выражение:

$$\hat{g}(x) \equiv \min_a \sum_{i=1}^n (Y_i - a) K\left(\frac{X_i - x}{h}\right).$$

Рассмотрим ее популярное расширение, которое не имеет смещения на краях, хотя может иметь другие проблемы, такие как потенциальная вырожденность, которая часто возникает в случае редких данных. Наиболее распространенным локально полиномиальным методом является локально линейный подход, который описывается ниже и который снова рассматривается для двумерного случая ради простоты обозначений.

Предполагая, что существует вторая производная $g(x)$, в малой окрестности точки x , $g(x_0) \approx g(x) + (\partial g(x)/\partial x)(x_0 - x) = a + b(x_0 - x)$. Задача оценивания $g(x)$ эквивалентна задаче оценивания константы a в рамках локально линейной регрессии. Задача оценивания отклика $\partial g(x)/\partial x$ эквивалентна задаче оценивания угла наклона b в рамках локально линейной регрессии.

Выберем a и b , минимизирующие

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - a - b(X_i - x))^2 K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) = \sum_{i=1}^n (Y_i - a - b(X_i - x))^2 K(Z_i).$$

Решения \hat{a} и \hat{b} являются локально линейными оценками $g(x)$ и $\beta(x)$, соответственно. Решая, получаем

$$\begin{pmatrix} \hat{g}(x) \\ \hat{\beta}(x) \end{pmatrix} = \left[\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 & X_i - x \\ X_i - x & (X_i - x)^2 \end{pmatrix} K(Z_i) \right]^{-1} \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 \\ X_i - x \end{pmatrix} K(Z_i) Y_i.$$

Одна из особенностей данного подхода в том, что он сразу дает оценки среднего и отклика, что не так в случае локально постоянной оценки. Формулы для асимптотического смещения и дисперсии приведены в п. 4.1.2 выше. Для оценивания маржинальных эффектов (то есть $\beta(x)$) обычно используют полином более высокого порядка (то есть для оценивания первых производных применяется локальная квадратичная регрессия) как средство снижения смещения (см. Fan & Gijbels, 1996).

Одна из проблем, часто выплывающих на поверхность при использовании этой оценки, заключается в вырожденности, возникающей из-за наличия редких данных, особенно при малой ширине окон, и для ее решения были предложены различные формы риджинга. Методы риджинга являются техникой решения плохо обусловленных задач линейной регрессии. Впервые этот подход был предложен в Hoerl & Kennard (1970). См. подробности использования риджинга в контексте локально линейной оценки в Cheng, Hall & Titterington (1997) и Seifert & Gasser (2000).

Поведение локально линейной оценки по отношению к h заметно отличается от случая локально постоянной оценки. При $h \rightarrow \infty$ локально линейная оценка $\hat{g}(x)$ стремится к $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$, где $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$ – МНК-оценки линейной регрессии y на x . То есть при $h \rightarrow \infty$ локально линейная подгонка приближается к глобально линейной подгонке точно так же, как локально постоянная подгонка приближается к глобально постоянной, а именно \bar{y} . Тем не менее, хотя локально постоянная оценка характеризуется тем, что несущественные переменные могут полностью сглаживаться, это свойство не сохраняется для локально линейной оценки, что может привести к излишней вариабельности при наличии несущественных регрессоров.

Формулы для смещения и дисперсии этой оценки приведены в главе 4.1. Многомерная версия локально линейной оценки для случая смешанных данных естественным образом следует при применении обобщенных мультипликативных ядер; см. подробности в Li & Racine (2004).

Симулированный двумерный пример

Рассмотрим пример, в котором генерируется выборка размера $n = 50$, x равномерно распределен, и $y = \sin(2\pi x) + \epsilon$, где ϵ – нормально распределенная величина с $\sigma = 0,25$. Сначала рассмотрим случай, когда для выбора ширины окна применяется кросс-валидация на основе наименьших квадратов. На Рис. 9 представлены данные, истинный DGP, а также локально постоянная и локально линейная оценки $g(x) = \sin(2\pi x)$.

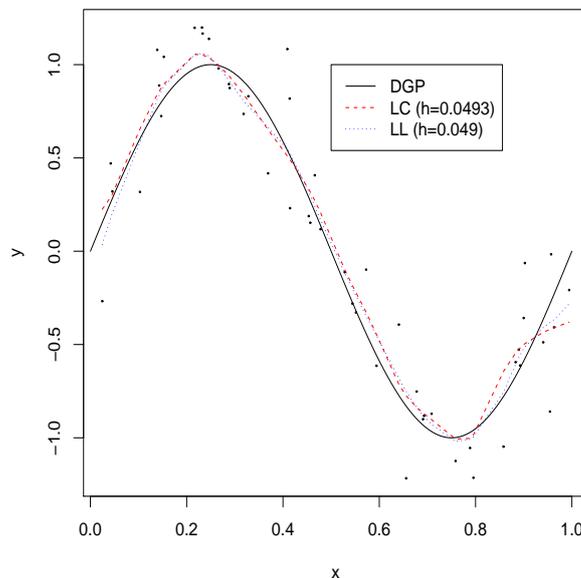


Рис. 9: Локально постоянная и локально линейная оценки при кросс-валидации на основе наименьших квадратов, $n = 50$.

Из Рис. 9 видно, что локально постоянная оценка характеризуется некоторым очевидным смещением на краях, так как оценка сдвигается немного вниз на правом краю и немного вверх на левом краю, как и следовало ожидать после изучения асимптотического смещения.

Тем не менее, обе оценки дают правдоподобное описание соответствующего DGP.

Далее рассмотрим различия в поведении локально постоянной и локально линейной оценок при $h \rightarrow \infty$. Положим соответствующую ширину окон равной $h = 100000$. На Рис. 10 представлены данные, истинный DGP, а также локально постоянная и локально линейная оценки.

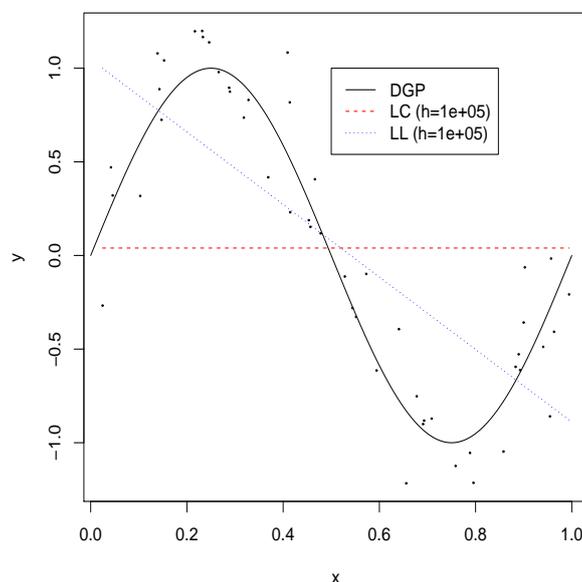


Рис. 10: Локально постоянная и локально линейная оценки при чрезмерном сглаживании, $h = 100000$, $n = 50$.

Рис. 10 ясно иллюстрирует четкие различия в свойствах каждой оценки при большом значении h и подчеркивает тот факт, что локально линейная оценка неспособна полностью удалить переменную с помощью чрезмерного сглаживания.

Предположим, интерес представляют маргинальные эффекты. В этом случае можно рассмотреть локально постоянную и локально линейную оценки $\beta(x)$. На Рис. 11 представлены соответствующие оценки отклика на основе полученной при кросс-валидации ширины окон.

Читатель может подумать, что эти оценки вовсе не такие гладкие, и, конечно, будет прав. Вспомним, что используется маленькая выборка ($n = 50$), стохастическая ширина окна, а при росте n оценки постепенно становятся гладкими. Тем не менее, здесь стоит отметить, что обычные параметрические спецификации, применяемые во многих прикладных эконометрических работах, вовсе неспособны отловить даже простое среднее и отклик, рассмотренные в этом примере. Напомним, что это и есть конкуренция, о которой говорилось выше, и, хотя оценки могут показаться некоторым читателям не столь приятными, на самом деле они высоко информативны.

Иллюстративное сравнение методов выбора ширины окна

Для оценки того, как различные методы выбора ширины окна работают на реальных данных, рассмотрим следующий пример, использующий данные из библиотеки `car` (Fox, 2002) программной среды R. Набор данных состоит из 102 наблюдений, каждое из которых соответствует конкретному роду занятий. Зависимая переменная – это престижность видов деятельности в Канаде, измеренная с помощью шкалы Пинео–Портера (Pineo–Porter) для профессий, взятых из социологического опроса середины 1960-х годов. Объясняющая переменная – средний доход для каждой профессии в канадских долларах 1971 г. На Рис. 12

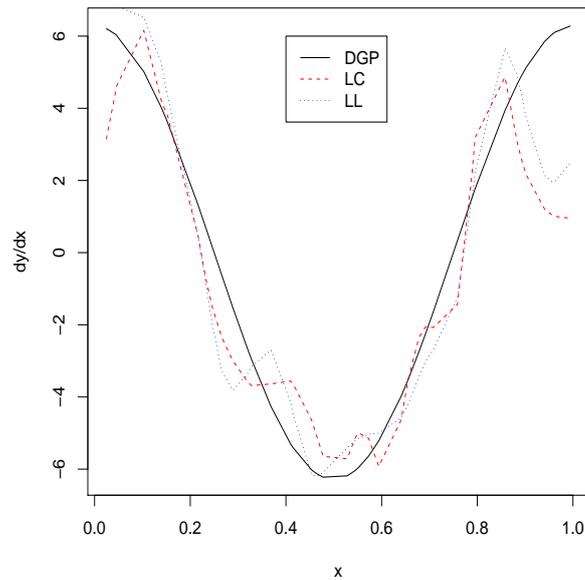


Рис. 11: Локально постоянная и локально линейная оценки отклика $\beta(x)$ при использовании кросс-валидации на основе наименьших квадратов, $n = 50$, $dy/dx = 2\pi \cos(2\pi x)$.

изображены данные и пять локально линейных оценок, соответствующих ширине окон при недостаточном сглаживании, чрезмерном сглаживании, полученной по методу прямой подстановки из Ruppert, Sheather & Wand (1995), AIC_c -методу из Hurvich, Simonoff & Tsai (1998) и при кросс-валидации. Во всех случаях использовалось гауссовское ядро второго порядка.

Как видно из рисунка, локально линейная оценка при чрезмерном сглаживании глобально линейна и в действительности соответствует простой линейной регрессии y на x , как и ожидалось, тогда как AIC_c -метод и кросс-валидация дают наиболее правдоподобную подгонку для имеющихся данных. Как уже отмечалось, в случае смешанных данных не существует правил подстановки. Мы получили разумные результаты при использовании кросс-валидации и AIC_c -метода в целом ряде ситуаций.

Приложение для многомерных смешанных данных

Рассмотрим множественный регрессионный анализ при наличии качественных переменных. Этот пример взят со с. 226 учебника Wooldridge (2003).

Рассмотрим уравнение почасовой заработной платы, для которого зависимой переменной является $\log(\text{wage})$ (lwage), а объясняющие переменные включают три непрерывных величины, а именно educ (число лет образования), exper (число лет опыта работы) и tenure (число лет работы у текущего работодателя) и две качественные величины – female (женский/мужской пол) и married (женат, замужем/не женат, не замужем). В этом примере имеется $n = 526$ наблюдений. Для выбора ширины окна используется AIC_c -метод из Hurvich, Simonoff & Tsai (1998), чьи результаты представлены в таблице 3.

На Рис. 13 изображены графики частных регрессий. График частной регрессии – это просто двумерный график зависимости y от одного из регрессоров x_j , когда все остальные регрессоры фиксированы на уровне соответствующих медиан/мод. Также изображены бутстрапские доверительные интервалы, которые часто предпочитают интервалам, полученным с помощью асимптотической аппроксимации.¹²

¹² Асимптотические формулы основаны на приближениях для малых значений h . Как отмечалось, иногда оптимальное сглаживание может справедливо требовать $h \rightarrow \infty$. Поскольку этого нельзя знать заранее,

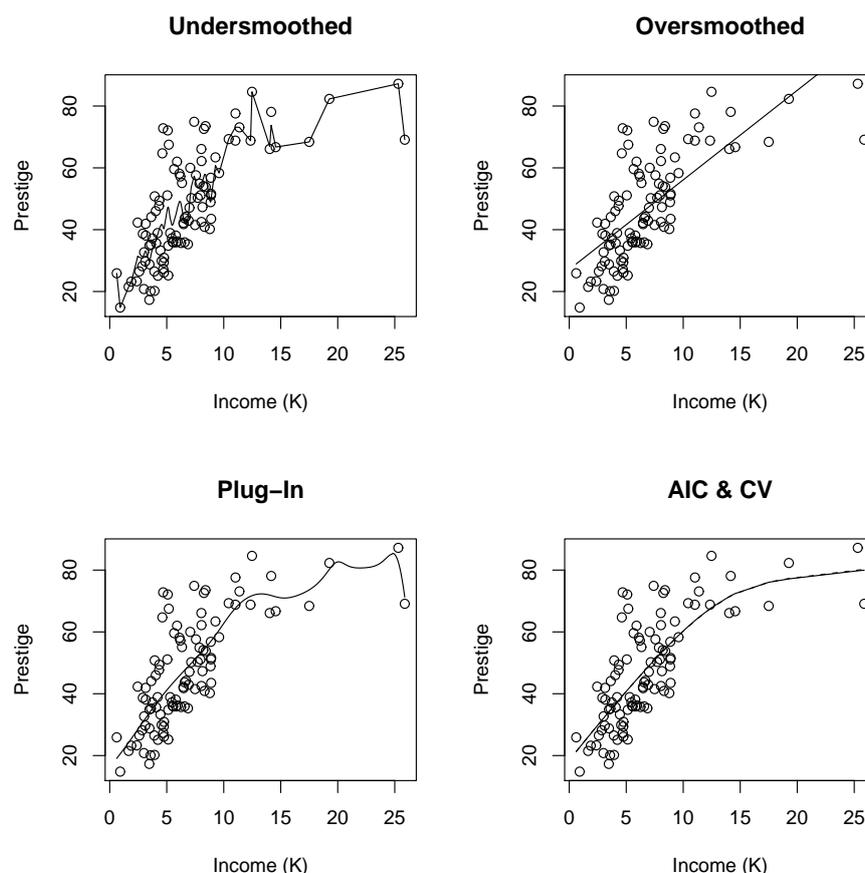


Рис. 12: Локально линейные ядерные оценки при различной ширине окна. Ширина окон соответствует недостаточному сглаживанию ($0,1\sigma n^{-1/5}$), чрезмерному сглаживанию ($10^3\sigma n^{-1/5}$), AIC_c -методу и кросс-валидации ($3,54\sigma n^{-1/5}$, $3,45\sigma n^{-1/5}$), методу подстановки ($1,08\sigma n^{-1/5}$).

На Рис. 14 представлены графики частных откликов с соответствующими бутстраповскими доверительными интервалами.

Отметим, что для двух категориальных переменных градиент вычисляется как разность заработных плат при остальных переменных, фиксированных на уровнях соответствующих медиан/мод, когда один из регрессоров меняет значение, скажем, с «незамужем» на «замужем». Заметим, что для крайнего левого значения каждой из характеристик («женский пол» и «женат/замужем») эта разность равна нулю, так как разность берется между значением, принимаемым переменной, и первым уровнем для каждой переменной; см. построение отклика в случае категориальных переменных в Racine, Hart & Li (2003).

4.3 Оценка качества подгонки

Необходим безразмерный показатель качества подгонки для моделей непараметрической регрессии, который был бы сравним с соответствующей мерой для параметрических регрессионных моделей, а именно с R^2 . Отметим, что, естественно, им будет *внутривыборочная* мера качества подгонки. Учитывая недостатки подсчета R^2 на основе разложения суммы квадратов (такие как возможные отрицательные значения), существует альтернативное определение и метод расчета R^2 , который напрямую применим к любой модели, линейной или нелинейной. Полагая, что Y_i обозначает исход, а \hat{Y}_i – подогнанное значение для наблюдения

асимптотические аппроксимации в этом случае, естественно, будут низкого качества.

Таблица 3: Результаты выбора ширины окон для уравнения почасовой заработной платы.

Regression Data (526 observations, 5 variable(s)):

Regression Type: Local Linear

Bandwidth Selection Method: Expected Kullback-Leibler Cross-Validation

Formula: $\text{lwage} \sim \text{factor}(\text{female}) + \text{factor}(\text{married}) + \text{educ} + \text{exper} + \text{tenure}$

Bandwidth Type: Fixed

Objective Function Value: -0.8570284 (achieved on multistart 5)

factor(female) Bandwidth: 0.01978275 Lambda Max: 0.500000

factor(married) Bandwidth: 0.15228887 Lambda Max: 0.500000

educ Bandwidth: 7.84663015 Scale Factor: 6.937558

exper Bandwidth: 8.43548175 Scale Factor: 1.521636

tenure Bandwidth: 41.60546059 Scale Factor: 14.099208

Continuous Kernel Type: Second-Order Gaussian

No. Continuous Explanatory Vars.: 3

Unordered Categorical Kernel Type: Aitchison and Aitken

No. Unordered Categorical Explanatory Vars.: 2

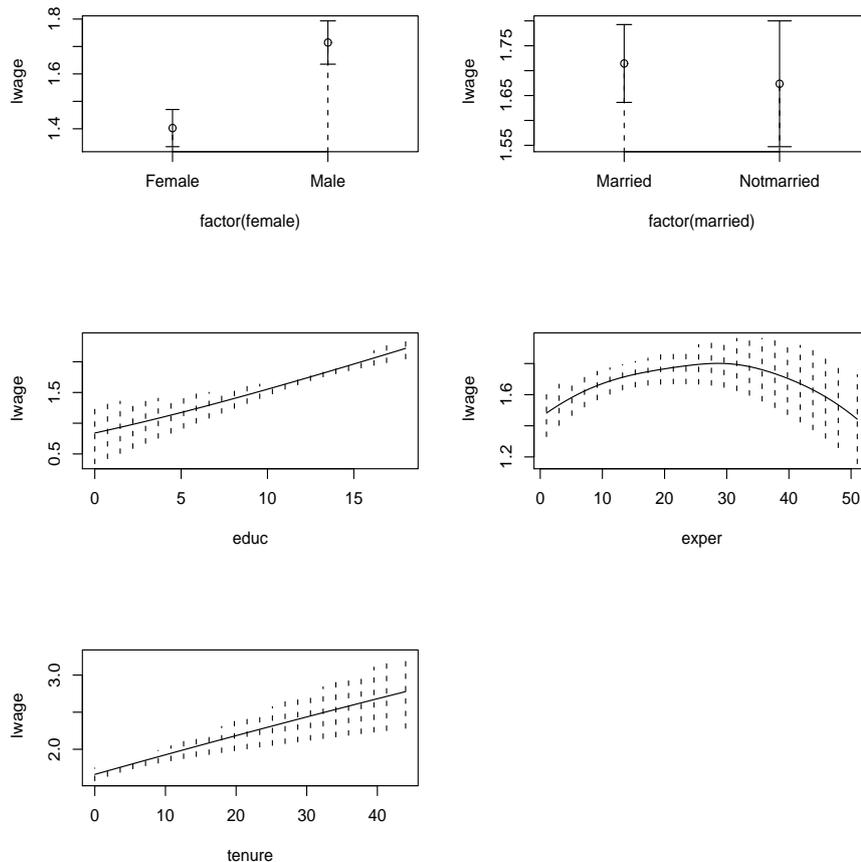


Рис. 13: Графики частных локально линейных непараметрических регрессий с бутстраповскими точечными доверительными интервалами для данных из Mroz (1987).

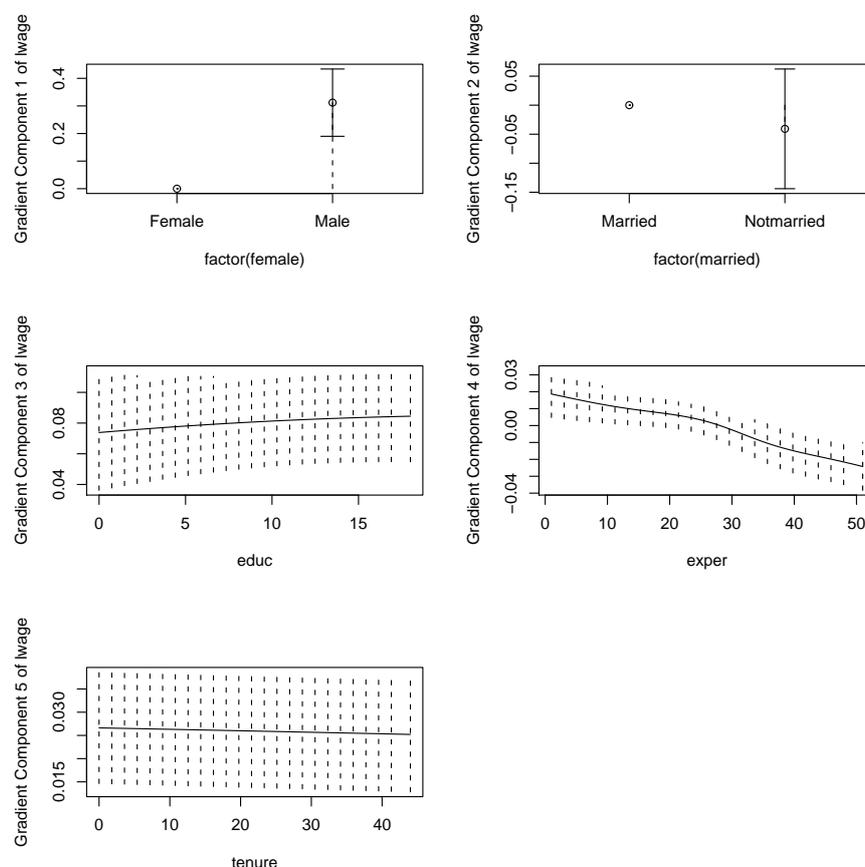


Рис. 14: Графики частных локально линейных непараметрических откликов с бутстраповскими точечными доверительными интервалами для данных из Mroz (1987).

i , можно определить R^2 следующим образом:

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})(\hat{Y}_i - \bar{y}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{y})^2},$$

и эта мера будет *всегда* принадлежать отрезку $[0, 1]$ и при равенстве единице означать точную подгонку данных, а при равенстве нулю – отсутствие предсказательной силы выше безусловного среднего зависимой переменной. Можно показать, что этот метод подсчета R^2 идентичен стандартному показателю, равному $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{y})^2 / \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})^2$, если модель линейна, включает константу и для подгонки применяется МНК. Эта полезная мера позволяет прямое сравнение качества подгонки внутри выборки, с очевидной оговоркой, что это ни в коем случае не критерий выбора модели, а просто показатель, который можно приводить в качестве результата оценивания. Этот показатель, конечно, можно также рассчитать, используя прогнозы и реализации вне выборки. Если рассматривать модели, оцениваемые на случайно выбранном подмножестве данных, а затем примененные к независимой выборке оставленных в стороне данных, эту меру, рассчитанную для отложенных данных, можно использовать для оценки различных моделей, особенно при усреднении по множеству независимых выборок отложенных данных.¹³

¹³Существует множество альтернативных показателей качества подгонки, рассчитываемых пакетом `npreg`. Для выяснения подробностей используйте команду `?npreg` в программной среде R.

Для рассмотренного выше примера со с. 226 учебника Wooldridge (2003) в случае локально линейной модели R^2 равен 51,5% при использовании этой меры, что можно напрямую сравнивать с *нескорректированным* R^2 в случае параметрической модели.

4.4 Устойчивая локально постоянная регрессия

Непараметрические ядерные методы часто (не без основания) критикуют из-за отсутствия робастности в традиционном смысле, а именно, к присутствию загрязнения в данных, которое может возникать из-за ошибок измерения, ввода данных и т.п. Методы, которые являются робастными в этом смысле, часто называют «устойчивыми», поскольку они «устойчивы» к присутствию небольшого числа плохих данных. Leung (2005) недавно предложил новый метод устойчивой робастной ядерной регрессии. Это новая захватывающая разработка, которая заслуживает внимания.

4.4.1 Устойчивая ядерная регрессия Леунга (2005)

Пусть $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^n$ обозначает выборку. Рассмотрим регрессию Y на X в n выбранных точках $\{X_i\}_{i=1}^n$,

$$Y_i = g(X_i) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14)$$

где $g(\cdot)$ – неизвестная функция от X , а $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ – IID случайные ошибки, имеющие распределение $F(\cdot)$.

Локально постоянная ядерная оценка $g(x)$, обозначаемая как $\hat{g}_h(x)$, имеет вид

$$\hat{g}_h(x) \equiv \arg \min_a \sum_{i=1}^n (Y_i - a)^2 K\left(\frac{X_i - x}{h}\right), \quad (15)$$

где h – ширина окна, определяющая степень локального сглаживания, а $K(\cdot)$ – ядерная функция, такая что $\int K(z) dz = 1$, $\int zK(z) dz = 0$ и $\int z^2K(z) dz = \mu < \infty$, например. Главный вопрос прикладных исследований – как лучше выбрать h .

Устойчивую локально постоянную ядерную оценку, с другой стороны, можно получить следующим образом:

$$\tilde{g}_{h|c}(x) \equiv \arg \min_a \sum_{i=1}^n \rho_c(Y_i - a) K\left(\frac{X_i - x}{h}\right). \quad (16)$$

где ρ_c – это, например, функция Хубера (Huber, 1964), на которой основаны M -оценки (см. с. 26 в Maronna, Martin & Yohai, 2006):

$$\rho_c(u) = \begin{cases} u^2, & \text{если } |u| \leq c, \\ 2c|u| - c^2, & \text{если } |u| > c. \end{cases} \quad (17)$$

Чтобы вычислить $\tilde{g}_{h|c}(x)$, необходимо выбрать параметр устойчивости c . Одно популярное прикладное правило – $c = 1,345 \times s$, где s – робастная мера масштаба, такая как медианное абсолютное отклонение от медианы (MAD). Это популярное правило обеспечивает 95%-ую эффективность относительно гомоскедастичной нормальной модели в проблеме местоположения. Конечно, этот подход вычислительно более требовательный, чем методы, рассмотренные в главе *Регрессия*. Однако убедительные симуляции и приложения, приведенные в работе Leung (2005), указывают на то, что этот метод заслуживает внимания тех исследователей, которые обеспокоены наличием выбросов в данных.

Связанные по тематике работы включают Stone (1977) и Cleveland (1979), в которых рассматривается устойчивая локально полиномиальная подгонка на основе взвешенного МНК,¹⁴ Cantoni & Ronchetti (2001), которые обсуждают сглаживание сплайнами при устойчивом выборе параметра сглаживания по схеме из Leung (2005), Fan & Jiang (2000), которые рассматривают устойчивые одношаговые локально полиномиальные оценки, но не обсуждают проблему выбора ширины окна, и Wang & Scott (1994), которые исследуют локально взвешенные полиномы, подогнанные с помощью методов линейного программирования. См. также Čížek & Härdle (2006), которые рассматривают устойчивое оценивание понижающих размерность регрессионных моделей.

Литература об устойчивых ядерных методах – важное продвижение, которое способно обновить методы ядерного сглаживания в интересном направлении, что привело бы к множеству по-настоящему устойчивых методов.

5 Полупараметрическая регрессия

Полупараметрические методы являются одними из наиболее популярных методов гибкого оценивания. Полупараметрические модели формируются при комбинировании параметрических и непараметрических моделей определенным способом. Такие модели полезны в ситуациях, когда полностью непараметрические модели срабатывают не очень хорошо, например, если проклятие размерности ведет к большой вариабельности оценок или исследователь хочет использовать параметрическую модель регрессии, но функциональная форма для части регрессоров или, возможно, плотность распределения ошибок неизвестна. Можно также представить себе ситуацию, в которой некоторые регрессоры входят в уравнение линейно (то есть, есть линейность по переменным), но функциональная форма параметров относительно других переменных неизвестна, или, возможно, регрессионная функция непараметрическая, а структура ошибок имеет параметрическую форму.

Полупараметрические модели являются компромиссом между полностью непараметрическими и полностью параметрическими спецификациями. Они основаны на параметрических предположениях и, следовательно, могут быть неправильно специфицированными и несостоятельными, так же как и их параметрические аналоги.

Было предложено множество полупараметрических методов. Далее ограничим внимание моделями регрессионного типа и рассмотрим три популярных метода, а именно: частично линейные, одноиндексные модели и модели с переменными коэффициентами.

5.1 Частично линейные модели

Частично линейная модель – одна из простейших полупараметрических моделей, применяемых на практике, – была предложена Робинсоном (Robinson, 1988), а Racine & Liu (2007) расширили его подход для случая категориальных регрессоров. Многие считают, что, поскольку модель очень проста, связанные с ней вычисления также должны быть простыми. Однако эта простота скрывает тот возможно недооцениваемый факт, что выбор ширины окна для частично линейных моделей может быть на несколько порядков сложнее вычислительно, чем для полностью непараметрических моделей, по одной простой причине. Как станет видно, в данном контексте применяются диктуемые данными методы выбора ширины окна, такие как кросс-валидация, и частично линейная модель требует от кросс-валидации регрессировать Y на Z (Z многомерный), а затем *каждый столбец* X на Z , тогда как кросс-валидация в случае полностью непараметрической модели подразумевает только регрессию

¹⁴Их метод “lowess” означает «локально взвешенную регрессию». Устойчивость следует из итеративной подгонки, где присваиваемые веса обратно пропорциональны остаткам из предыдущей подгонки, что ведет к снижению весов выбросов.

Y на X . Таким образом, вычислительные требования, связанные с частично линейными моделями, являются гораздо более серьезными, чем для полупараметрических моделей, о чем следует знать заранее.

Полупараметрическая частично линейная модель задается следующим образом:

$$Y_i = X_i' \beta + g(Z_i) + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (18)$$

где X_i – $p \times 1$ вектор, β – $p \times 1$ вектор неизвестных параметров, и $Z_i \in \mathbb{R}^q$. Функциональная форма $g(\cdot)$ не специфицирована. Конечномерный параметр β составляет параметрическую часть модели, а неизвестная функция $g(\cdot)$ – непараметрическую часть. Предполагается, что данные являются IID с $\mathbb{E}[u_i | X_i, Z_i] = 0$, а процесс для ошибок условно гетероскедастичен с $\mathbb{E}[u_i^2 | x, z] = \sigma^2(x, z)$ неизвестной формы. Обсудим, каким образом получить \sqrt{n} -состоятельную оценку β , поскольку, сделав это, оценку $g(\cdot)$ легко получить с помощью непараметрической регрессии $Y_i - X_i \hat{\beta}$ на z .

Взяв математическое ожидание (18) условно на Z_i , получим

$$\mathbb{E}[Y_i | Z_i] = \mathbb{E}[X_i | Z_i]' \beta + g(Z_i). \quad (19)$$

Вычитая (19) из (18), имеем

$$Y_i - \mathbb{E}[Y_i | Z_i] = (X_i - \mathbb{E}[X_i | Z_i])' \beta + u_i. \quad (20)$$

Обозначая $\tilde{Y}_i = Y_i - \mathbb{E}[Y_i | Z_i]$ и $\tilde{X}_i = X_i - \mathbb{E}[X_i | Z_i]$ и применяя МНК к (20), получаем оценку β :

$$\hat{\beta}_{\text{inf}} = \left[\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \tilde{X}_i' \right]^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \tilde{Y}_i. \quad (21)$$

Данная оценка $\hat{\beta}_{\text{inf}}$ недоступна, так как $\mathbb{E}[Y_i | Z_i]$ и $\mathbb{E}[X_i | Z_i]$ неизвестны. Известно, однако, что эти условные матожидания можно состоятельно оценить, используя ядерные методы, описанные в главе *Регрессия*, так что можно заменить неизвестные условные матожидания в формуле для $\hat{\beta}_{\text{inf}}$ их ядерными оценками, получая, таким образом, доступную оценку β . Необходимы также некоторые условия для идентификации вектора параметров β , подробности см. в Robinson (1988).

Частично линейный пример

Рассмотрим снова набор данных “wage1” из учебника Wooldridge (2002), но предположим теперь, что исследователь не хочет специфицировать природу взаимосвязи между переменными exper и lwage и, следовательно, переносит переменную exper в непараметрическую часть полупараметрической линейной модели. В таблице 4 представлены результаты оценивания частично линейной модели.

Интересно сравнить эти результаты с результатами для линейной модели, которая квадратична по опыту, приведенными в таблице 5, и для локально линейной модели, представленными в главе *Регрессия*. Вначале отметим, что оценки параметров и соответствующие стандартные ошибки сравнимы по величине с результатами для полностью параметрической спецификации, которые содержатся в таблице 5. Во-вторых, в терминах внутривыборочной подгонки, полупараметрическая частично линейная спецификация ($R^2 = 44,9\%$) немного лучше параметрической спецификации ($R^2 = 43,6\%$), тогда как полностью непараметрическая спецификация ($R^2 = 51,5\%$) превосходит как полностью параметрическую, так и частично линейную спецификации.

Таблица 4: Результаты оценивания частично линейного уравнения почасовой заработной платы.

```

Partially Linear Model
Regression data: 526 training points, in 5 variable(s)
With 4 linear parametric regressor(s), 1 nonparametric regressor(s)

          y(z)
Bandwidth(s): 2.050966

          x(z)
Bandwidth(s): 4.1943673
              1.3531783
              3.1605552
              0.7646561

          factor(female) factor(married)      educ      tenure
Coefficient(s):      0.2902499      -0.03722828 0.07879512 0.01662935
Standard error(s):  0.0359527      0.04230253 0.00676465 0.00308927

Kernel Regression Estimator: Local Constant
Bandwidth Type: Fixed

Residual standard error: 0.1553021
R-squared: 0.4493789

```

Таблица 5: Результаты оценивания полностью линейного уравнения почасовой заработной платы.

```

Coefficients:

              Estimate Std. Error
(Intercept)      0.1811615  0.1070747
factor(female)Male  0.2911303  0.0362832
factor(married)Notmarried -0.0564494  0.0409259
educ              0.0798322  0.0068273
tenure            0.0160739  0.0028801
exper            0.0300995  0.0051931
I(exper^2)       -0.0006012  0.0001099

Multiple R-Squared: 0.4361,      Adjusted R-squared: 0.4296

```

5.2 Индексные модели

Полупараметрическая индексная модель имеет вид

$$Y = g(X'\beta_0) + u, \quad (22)$$

где Y – зависимая переменная, $X \in \mathbb{R}^q$ – вектор объясняющих переменных, $\beta_0 - q \times 1$ вектор неизвестных параметров, и u – ошибка, удовлетворяющая $\mathbb{E}[u|X] = 0$. Член $X'\beta_0$ называется одиночным индексом, так как это одномерная величина, хотя X – вектор. Функциональная форма $g(\cdot)$ неизвестна исследователю. Модель является полупараметрической по природе, так как функциональная форма линейного индекса специфицирована, а $g(\cdot)$ – нет.

Ichimura (1993), Manski (1988) и с. 14–20 в Horowitz (1998) дают превосходные интуитивные объяснения условий идентификации для полупараметрических одноиндексных моделей (то есть условий, при которых неизвестный вектор параметров β_0 и неизвестную функцию $g(\cdot)$ можно разумно оценить), заинтересованный читатель может обратиться к этим источникам за подробностями.

5.2.1 Метод Ичимуры

Рассмотрим случай непрерывного Y . Если бы функциональная форма $g(\cdot)$ была известна, мы получили бы стандартную модель нелинейной регрессии, и могли бы использовать нелинейный МНК для оценки β_0 путем минимизации

$$\sum_i (Y_i - g(X_i' \beta))^2 \quad (23)$$

по параметру β .

В случае неизвестной функции $g(\cdot)$, сначала требуется оценить $g(\cdot)$. Однако ядерные методы не способны напрямую оценить $g(X_i' \beta_0)$, поскольку неизвестны ни функция $g(\cdot)$, ни β_0 . Тем не менее, для фиксированного значения β можно оценить

$$G(X_i' \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[Y_i | X_i' \beta] = \mathbb{E}[g(X_i' \beta_0) | X_i' \beta] \quad (24)$$

с помощью ядерного метода, где последнее равенство следует из того, что $\mathbb{E}[u_i | X_i' \beta] = 0$ для всех β , поскольку $\mathbb{E}[u_i | X_i] = 0$.

Заметим, что при $\beta = \beta_0$, $G(X_i' \beta_0) = g(X_i' \beta_0)$, тогда как в общем случае $G(X_i' \beta) \neq g(X_i' \beta_0)$, если $\beta \neq \beta_0$. Ichimura (1993) предложил оценивать $g(X_i' \beta_0)$ как $\hat{G}_{-i}(X_i' \beta)$, выбирая β с помощью (полупараметрического) нелинейного МНК, где $\hat{G}_{-i}(X_i' \beta)$ – непараметрическая ядерная оценка $G(X_i' \beta)$ по всей выборке, исключая наблюдение i .

Одноиндексный пример для непрерывного Y

Рассмотрим далее применение одноиндексного метода Ичимуры (Ichimura, 1993), который подходит для ситуации непрерывной зависимой переменной, в отличие от рассматриваемого ниже метода Клейна и Спэйти (Klein & Spady, 1993). Снова используем набор данных “wage1” из учебника Wooldridge (2002). В таблице 6 представлены результаты анализа.

Таблица 6: Результаты оценивания полупараметрической индексной модели уравнения почасовой заработной платы.

Single Index Model

Regression Data: 526 training points, in 6 variable(s)

```

      factor(female) factor(married)      educ      exper      expersq      tenure
Beta:              1             -2.783907 9.947963 3.332755 -0.0750266 2.310801
Bandwidth: 2.457583
Kernel Regression Estimator: Local Constant

```

Residual standard error: 0.1552531

R-squared: 0.4501873

Интересно сравнить эти результаты с результатами для параметрической и непараметрической моделей, рассмотренных ранее, поскольку в данном случае мы получаем меру внутривыборочной подгонки равной 45,1%, которая лежит между соответствующими величинами

для параметрической (43,6%) и полностью непараметрической локально линейной (51,5%) моделей.

5.2.2 Оценка Клейна–Спэйди

Рассмотрим случай, когда переменная Y бинарна. Предполагая независимость ϵ_i и X_i , Klein & Spady (1993) предложили оценивать β методом максимального правдоподобия. Оценка логарифмической функции правдоподобия имеет вид

$$\mathcal{L}(\beta, h) = \sum_i (1 - Y_i) \ln(1 - \hat{g}_{-i}(X_i' \beta)) + \sum_i Y_i \ln(\hat{g}_{-i}(X_i' \beta)), \quad (25)$$

где $\hat{g}_{-i}(X_i' \beta)$ – оценка по всей выборке за исключением i -го наблюдения. Максимизация (25) по β и h дает полупараметрическую ММП-оценку β , предложенную в Klein & Spady (1993). Как и в случае метода Ичимуры, максимизацию необходимо проводить численными методами.

Одноиндексный пример для бинарного Y

Рассмотрим вновь данные о весе при рождении, взятые из библиотеки MASS (Venables & Ripley, 2002) программной среды R, и оценим одноиндексную модель (результаты оценивания логит-модели и модели непараметрической условной моды даны в главе *Оценивание условной плотности*). Исход является индикатором низкого веса младенца при рождении (0/1), так что подход Клейна и Спэйди применим. Таблица расхождения приведена в таблице 7.

Таблица 7: Таблица расхождения для данных по низкому весу при рождении при использовании одноиндексной модели.

		Предсказано	
		0	1
Реально	0	125	5
	1	37	22

Можно увидеть, что при внутривыборочной классификации эта модель ведет себя несколько лучше, чем параметрическая логит-модель, для этого набора данных. Одноиндексная модель правильно классифицирует $(125 + 22)/189 = 77,8\%$ случаев низкого/высокого веса новорожденных, тогда как логит-модель правильно классифицирует $(119 + 25)/189 = 76,1\%$.

5.3 Модели с гладкими (переменными) коэффициентами

Модель с гладкими коэффициентами была предложена в работе Hastie & Tibshirani (1993) и имеет следующий вид:

$$Y_i = \alpha(Z_i) + X_i' \beta(Z_i) + u_i = (1 \ X_i') \begin{pmatrix} \alpha(Z_i) \\ \beta(Z_i) \end{pmatrix} + u_i = W_i' \gamma(Z_i) + u_i, \quad (26)$$

где $X_i - k \times 1$ вектор, а $\beta(z)$ – вектор неспецифицированных гладких функций от z . Умножая слева на W_i и беря матожидание по Z_i , имеем

$$\mathbb{E}[W_i Y_i | Z_i] = \mathbb{E}[W_i W_i' | Z_i] \gamma(Z_i) + \mathbb{E}[W_i u_i | Z_i]. \quad (27)$$

Можно выразить $\gamma(\cdot)$ как

$$\gamma(Z_i) = (\mathbb{E}[W_i W_i' | Z_i])^{-1} \mathbb{E}[W_i Y_i | Z_i]. \quad (28)$$

Li & Racine (2007b) рассматривают ядерный подход, который годится как для дискретных, так и для непрерывных регрессоров. Авторы предлагают использовать локально постоянную оценку вида

$$\hat{\gamma}(z) = \left[\sum_{j=1}^n W_j W_j' K \left(\frac{Z_j - z}{h} \right) \right]^{-1} \sum_{j=1}^n W_j Y_j K \left(\frac{Z_j - z}{h} \right)$$

и предлагают вариант кросс-валидации для выбора ширины окна; см. подробности в Li & Racine (2007b). Подогнанная модель имеет вид

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i = W_i' \hat{\gamma}(Z_i) + \hat{u}_i.$$

Пример применения модели с гладкими коэффициентами

Рассмотрим снова набор данных “wage1” из учебника Wooldridge (2002), но предположим теперь, что исследователь не хочет предполагать, что коэффициенты при непрерывных переменных неизменны относительно категориальных переменных female и married. В таблице 8 представлены результаты оценивания модели с гладкими коэффициентами.

Таблица 8: Результаты оценивания уравнения почасовой заработной платы в рамках модели с гладкими коэффициентами.

Smooth Coefficient Model

Regression data: 526 training points, in 2 variable(s)

	factor(female)	factor(married)
Bandwidth(s):	0.001813091	0.1342957

Bandwidth Type: Fixed

Residual standard error: 0.1470017

R-squared: 0.4787102

Average derivative(s):

Intercept	educ	tenure	exper	expersq
0.3402224978	0.0786499683	0.0142981775	0.0300505722	-0.0005950969

Сравнивая эти результаты с результатами для линейной модели, квадратичной по опыту работы, представленными в таблице 5, получаем, что средние значения параметров сравнимы по величине с полученными из полностью параметрической спецификации, приведенными в таблице 5. Однако полупараметрическая модель с гладкими коэффициентами превосходит параметрическую спецификацию в терминах внутривыборочной подгонки данных ($R^2 = 47,8\%$ против $R^2 = 43,6\%$). Это означает, что дополнительная гибкость, получаемая за счет возможности варьирования параметров относительно непрерывных переменных, ведет к улучшению качества подгонки.

6 Модели панельных данных

Непараметрическое и полупараметрическое оценивание моделей панельных данных получило меньше внимания, чем оценивание стандартных моделей регрессии. Панельные данные представляют собой выборки, состоящие из наблюдений за N пространственными единицами в течение T последовательных периодов времени, что дает набор данных в форме

$\{Y_{it}, X_{it}\}_{i=1, t=1}^{N, T}$. Панель, таким образом, – это просто набор N индивидуальных временных рядов, которые могут быть короткими (при малом T) или длинными (при большом T).

Непараметрическое оценивание моделей временных рядов само по себе является развивающейся областью. Однако, если T велико и N мало, для каждой единицы имеется длинный временной ряд и в таких случаях можно избежать оценивания модели панельных данных, просто оценивая по отдельности непараметрические модели для каждой индивидуальной единицы, используя индивидуальные временные ряды, доступные для каждой из них. Если имеет место такая ситуация, заинтересованный читатель может обратиться к главе 18 в Li & Racine (2007) за ссылками на литературу о непараметрических методах оценивания временных рядов.

При рассмотрении непараметрического оценивания моделей панельных данных одна из проблем, которая тут же возникает, состоит в том, что стандартные (параметрические) подходы, часто применяемые для моделей панельных данных (такие как взятие первых разностей для удаления так называемых фиксированных эффектов), более не являются корректными, если только не предполагать аддитивно сепарабельные эффекты, что во многом лишает смысла использование непараметрических методов.

В литературе было предложено множество подходов, включая работу Wang (2003), который предложил новый метод оценивания непараметрических моделей панельных данных, использующий информацию, содержащуюся в структуре ковариационной матрицы ошибок модели, работу Wang, Carroll & Lin (2005), которые предложили частично линейную модель со случайными эффектами, и работу Carroll, Henderson & Li (2006), которые рассматривают методы профиля правдоподобия для непараметрического оценивания моделей с аддитивными фиксированными эффектами, удаляемыми путем взятия первых разностей. Далее рассмотрим прямое непараметрическое оценивание моделей с фиксированными эффектами, используя методы, описанные в разделе *Регрессия*.

6.1 Непараметрическое оценивание панельных моделей с фиксированными эффектами

Рассмотрим следующую непараметрическую регрессионную модель панельных данных:

$$Y_{it} = g(X_{it}) + u_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, N, t = 1, 2, \dots, T,$$

где $g(\cdot)$ – неизвестная гладкая функция, $X_{it} = (X_{it,1}, \dots, X_{it,q})$ имеет размерность q , все другие переменные являются одномерными, и $\mathbb{E}[u_{it}|X_{i1}, \dots, X_{iT}] = 0$.

Говорят, что панельные данные «однородны», если можно объединить все данные, в сущности игнорируя временную размерность, то есть суммируя по i и t , не обращая внимания на временную размерность и помещая таким образом все данные в один пул, а затем напрямую применяя методы, скажем, из главы *Регрессия*. Конечно, если данные неоднородны, это, очевидно, не будет разумным выбором.

Однако, чтобы допустить возможность того, что данные на самом деле *потенциально* однородны, можно ввести *неупорядоченную* дискретную переменную, скажем $\delta_i = i$, $i = 1, 2, \dots, N$, и оценить $\mathbb{E}[Y_{it}|Z_{it}, \delta_i] = g(Z_{it}, \delta_i)$ непараметрически, используя ядерный подход для случая смешанных дискретных и непрерывных данных, рассмотренный в главе *Оценивание плотности и функции вероятности*. Переменная δ_i сродни включению пространственных фиктивных переменных (как поступают, например, при МНК-оценивании моделей линейной регрессии на панельных данных при включении фиктивных переменных). Если обозначить за $\hat{\lambda}$ полученный при кросс-валидации параметр сглаживания, связанный с δ_i , то, если $\hat{\lambda}$ достигает своей верхней границы, получаем $g(Z_{it}, \delta_i) = g(Z_{it})$, и данные, таким образом, объединяются в получаемой оценке $g(\cdot)$. Если, с другой стороны, $\hat{\lambda} = 0$ (или близка

к 0), получаем оценку каждой $g_i(\cdot)$, используя только временной ряд для i -й единицы наблюдения. Наконец, случай $0 < \hat{\lambda} < 1$, можно интерпретировать как частичную однородность данных.

Стоит отметить, что вдобавок к вопросу об однородности существует также проблема корректности инференции на возможную серийную корреляцию ошибок u_{it} . То есть, даже если данные однородны, нельзя слепо применять асимптотический подход; адекватный бутстраповский подход, вероятно, на практике сработает лучше всего.

Применение к панельным данным об издержках авиакомпаний в США

Рассмотрим панель ежегодных наблюдений по шести американским авиакомпаниям за период с 1970 по 1984, взятую из пакета Ecdat (Croissant, 2006) программной среды R, см. таблицу F7.1 на с. 949 в учебнике Greene (2003). Переменными являются авиакомпания (“airline”), год (“year”), логарифм общих издержек в \$1000 (“lcost”), логарифм показателя выпуска, коммерческого оборота в пассажиро-милях (“loutput”), логарифм цены топлива (“lpf”), и коэффициент загрузки, то есть средний коэффициент использования мощностей самолетного парка (“lf”). Переменная “airline” воспринимается как неупорядоченный показатель, а “year” – упорядоченный, и используется локально линейная оценка на основе AIC_c-метода из Hurvich, Simonoff & Tsai (1998).

В таблице 9 представлена информация о ширине окон, а на Рис. 15 – графики частных регрессий.

Таблица 9: Информация о ширине окон в локально линейной модели панельных данных по американским авиакомпаниям.

Var.: loutput	Bandwidth: 1020484	Scale Factor: 1.696225e+06
Var.: lpf	Bandwidth: 1417256	Scale Factor: 3.336533e+06
Var.: lf	Bandwidth: 0.0130355	Scale Factor: 0.472229
Var.: ordered(year)	Bandwidth: 0.1107695	Lambda Max: 1.000000
Var.: factor(airline)	Bandwidth: 0.0024963	Lambda Max: 1.000000

Осмотр таблицы 9 показывает, что ширина окна для неупорядоченной переменной “airline” равна 0,0025, то есть модель не является однородной по авиакомпаниям (больше подходит модель отдельных временных рядов для каждой авиакомпании). Рис. 15 показывает, что издержки растут с объемом выпуска и ценой топлива и убывают по коэффициенту загрузки.

Для сравнения в таблице 10 представлены результаты оценивания линейной модели панельных данных с фиксированными эффектами при использовании пакета plm (Croissant & Millo, 2007) программной среды R.

Сравнение Рис. 15 и таблицы 10 показывает, что как параметрическая, так и непараметрическая модели согласуются в том, что издержки растут с выпуском и ценой топлива и падают по коэффициенту загрузки при прочих равных.

7 Состоятельное тестирование гипотез

Литература о применении непараметрических ядерных методов для тестирования гипотез испытала невероятный рост и породила множество новых подходов к тестированию ряда гипотез. Существуют непараметрические методы для тестирования на правильность спецификации параметрических моделей, тесты на совпадение распределений и регрессионных функций, среди прочих.

Параметрические тесты обычно требуют спецификации множества параметрических альтернатив, для которых нулевая гипотеза отвергается. Если, однако, нулевая гипотеза неверна

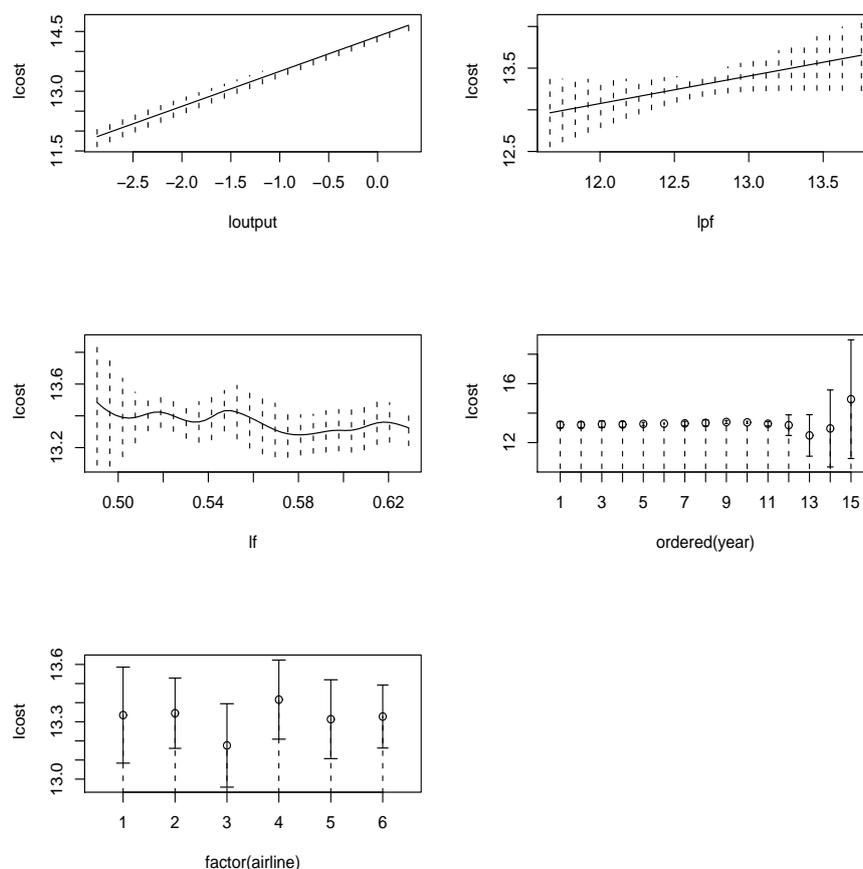


Рис. 15: Графики частных регрессий с бутстраповскими доверительными интервалами для панельных данных по американским авиалиниям.

Таблица 10: Результаты оценивания параметрической модели с фиксированными эффектами для панельных данных по американским авиалиниям.

```

----- Model Description -----
Oneway (individual) effect
Within Model
Model Formula      : log(cost) ~ log(output) + log(pf) + lf

----- Coefficients -----
      Estimate Std. Error z-value Pr(>|z|)
log(output)  0.919285   0.028841 31.8743 < 2.2e-16 ***
log(pf)      0.417492   0.014666 28.4673 < 2.2e-16 ***
lf           -1.070396   0.194611 -5.5002 3.794e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
    
```

и тем не менее существуют альтернативные модели, которые тест не может обнаружить, тогда такой тест называют несостоятельным, то есть у него не хватает мощности. Для построения состоятельных тестов можно вместо параметрических использовать непараметрические методы.

Для точности определим, что имеется в виду под «состоятельным тестом». Пусть H_0 обо-

значает нулевую гипотезу, чью достоверность требуется проверить. Тест называют *состоятельным*, если

$$\mathbb{P}\{\text{отвергнуть } H_0 \mid H_0 \text{ неверна}\} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Мощность теста определяется как $\mathbb{P}\{\text{отвергнуть } H_0 \mid H_0 \text{ неверна}\}$. Следовательно, состоятельный тест имеет асимптотическую мощность, равную единице.

Далее рассмотрим несколько тестов, которые могут пригодиться практикам.

7.1 Тестирование правильности спецификации параметрической модели

Существует множество методов тестирования правильности спецификации параметрических моделей регрессии, включая методы Härdle & Mammen (1993), Horowitz & Härdle (1994), Horowitz & Spokoiny (2001), Hristache, Juditsky & Spokoiny (2001) и Hsiao, Li & Racine (2007), среди прочих. Опишем кратко тест из Hsiao, Li & Racine (2007), поскольку он распространяется на случай смешанных непрерывных и категориальных данных, часто встречающийся в прикладных задачах.

Предположим, необходимо протестировать правильность параметрической модели регрессии. Нулевую гипотезу можно сформулировать следующим образом:

$$H_0 : \mathbb{E}[Y|x] = m(x, \gamma_0), \text{ почти для всех } x \text{ и для некоторого } \gamma_0 \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^p, \quad (29)$$

где $m(x, \gamma)$ – известная функция, $\gamma - p \times 1$ вектор неизвестных параметров (что, естественно, включает модель линейной регрессии как частный случай), а \mathcal{B} – компактное подмножество \mathbb{R}^p . Альтернативная гипотеза – отрицание H_0 , то есть $H_1: \mathbb{E}[Y|x] \equiv g(x) \neq m(x, \gamma)$ для всех $\gamma \in \mathcal{B}$ на множестве (точек x) положительной меры. Если определить $u_i = Y_i - m(X_i, \gamma_0)$, нулевую гипотезу можно эквивалентно записать в виде

$$\mathbb{E}[u_i|X_i = x] = 0 \text{ почти для всех } x. \quad (30)$$

Состоятельный тест на спецификацию модели можно построить на основе непараметрического оценивания (30) и усреднения по u_i определенным способом, который мы кратко опишем. Во-первых, заметим, что $\mathbb{E}[u_i|X_i = x] = 0$ эквивалентно $(\mathbb{E}[u_i|X_i = x])^2 = 0$. Также, поскольку требуется тестировать нулевую гипотезу о том, что $\mathbb{E}[u_i|X_i = x] = 0$ почти для всех x , необходимо рассматривать матожидание $\mathbb{E}[\mathbb{E}[u_i|X_i = x]]$ или, эквивалентно, $\mathbb{E}[(\mathbb{E}[u_i|X_i = x])^2]$. По закону повторных матожиданий $\mathbb{E}[(\mathbb{E}[u_i|X_i = x])^2] = \mathbb{E}[u_i \mathbb{E}[u_i|X_i = x]]$. Следовательно, можно построить состоятельную тест-статистику на основе взвешенной плотностью версии $\mathbb{E}[u_i \mathbb{E}[u_i|X_i = x]]$, а именно $\mathbb{E}[u_i \mathbb{E}[u_i|X_i] f(X_i)]$, где $f(x)$ – совместная плотность X . Взвешивание плотностью используется просто для избежания случайного знаменателя, который в противном случае появился бы в ядерной оценке.

Выборочным аналогом $\mathbb{E}[u_i \mathbb{E}[u_i|X_i] f(X_i)]$ является выражение $n^{-1} \sum_{i=1}^n u_i \mathbb{E}[u_i|X_i] f(X_i)$. Для получения доступной тест-статистики заменим u_i на \hat{u}_i , где $\hat{u}_i = Y_i - m(X_i, \hat{\gamma})$ – остаток, полученный из параметрической модели при нулевой гипотезе, а $\hat{\gamma} - \sqrt{n}$ -состоятельная оценка γ из нулевой модели (скажем, оценка нелинейного МНК). Выражение $\mathbb{E}[u_i \mathbb{E}[u_i|X_i] f(X_i)]$ оценим с помощью ядерного метода по всей выборке за исключением одного наблюдения $(n-1)^{-1} \sum_{j \neq i}^n \hat{u}_j K_{ij}$. Полагая, что X_i – вектор смешанных дискретных и непрерывных данных, и используя обобщенные мультипликативные ядра, получаем тест-статистику в виде

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, j \neq i}^n \hat{u}_j K_{ij} \right\} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \hat{u}_i \hat{u}_j K_{ij}. \quad (31)$$

Стьюдентизированная версия этого теста обозначается за J_n . Для получения распределения I_n (J_n) можно использовать бутстраповские методы и получать бутстраповские р-значения; см. подробности в Hsiao, Li & Racine (2007).

Тест на правильность спецификации наивной линейной модели

Оценив, скажем, простую параметрическую модель заработной платы, линейную по переменным, можно тестировать нулевую гипотезу о правильной спецификации параметрической модели, используя подход Hsiao, Li & Racine (2007), описанный выше. Для выбора ширины окон используется кросс-валидация, а для формирования распределения J_n при нулевой гипотезе используется простой бутстраповский метод.

Таблица 11: Результаты теста на правильность спецификации параметрического уравнения почасовой заработной платы.

```
Consistent Model Specification Test
Parametric null model: lm(formula = lwage ~
                           factor(female) +
                           factor(married) +
                           educ +
                           exper +
                           tenure,
                           data = wage1,
                           x = TRUE,
                           y = TRUE)
```

```
Number of regressors: 5
IID Bootstrap (399 replications)
```

```
Test Statistic 'Jn': 5.542416   P Value: < 2.22e-16
```

Таблица 11 дает понять, что, как неудивительно, наивная спецификация, линейная по всем переменным, не включающая переменные взаимодействия, и только лишь позволяющая константе меняться относительно категориальных переменных, отвергается. Заметим, что мы не продвигаем данную параметрическую спецификацию как идеального кандидата, а просто демонстрируем, что тест способен обнаруживать неверно специфицированные параметрические модели в конечных выборках.

7.2 Тест на значимость в непараметрических моделях регрессии

Оценив параметрическую модель регрессии, исследователи часто переходят к тесту на значимость. Тест на значимость часто применяется для подтверждения или опровержения экономических теорий. Тем не менее, в рамках параметрической модели регрессии, надежность параметрической инференции зависит от правильной функциональной спецификации соответствующего процесса, порождающего данные, а тесты на значимость для неверно специфицированных параметрических моделей будут иметь неверные размер и мощность, приводя, таким образом, к ошибочной инференции. В литературе предложено множество подходов, включая подход Lavergne & Vuong (1996), которые рассмотрели проблему выбора непараметрических регрессоров в рамках невложенных регрессионных моделей, работу Donald (1997), в которой предложен непараметрический тест для выбора факторов в многомерной непараметрической зависимости, работу Racine (1997), в которой рассмотрен тест на значимость для непрерывных регрессоров, и статью Racine, Hart & Li (2006), где рассмотрен состоятельный тест на значимость для категориальных регрессоров. См. также альтернативный непараметрический тест на значимость непрерывных переменных в непараметрических моделях регрессии в Delgado & Manteiga (2001).

7.2.1 Категориальные регрессоры

Предположим, мы оценили непараметрическую модель регрессии, в которой некоторые регрессоры категориальные, а некоторые непрерывные, и хотим протестировать, являются ли некоторые из категориальных регрессоров несущественными, то есть избыточными. Для этого можно применить тест из Racine, Hart & Li (2006), который коротко опишем. Пусть Z – категориальные объясняющие переменные, которые могут быть избыточными, X – остальные объясняющие переменные в модели регрессии, а Y – зависимая переменная. Тогда нулевую гипотезу можно записать как

$$H_0 : \mathbb{E}[Y|x, z] = \mathbb{E}[Y|x] \text{ почти везде.}$$

Альтернативная гипотеза – отрицание нулевой гипотезы H_0 , то есть $H_1: \mathbb{E}[Y|x, z] \neq \mathbb{E}[Y|x]$ на множестве положительной меры.

Положим $g(x) = \mathbb{E}[Y|x]$ и $m(x, z) = \mathbb{E}[Y|x, z]$, тогда нулевая гипотеза примет вид: $m(x, z) = g(x)$ почти везде. Предположим, что одномерная величина Z может принимать c различных значений, $\{0, 1, 2, \dots, c-1\}$. При $c = 2$ величина Z – это 0-1 фиктивная переменная, что, возможно, является наиболее часто встречающимся на практике случаем.

Заметим, что нулевая гипотеза H_0 эквивалентна $m(x, z = l) = m(x, z = 0)$ для всех X и для $l = 1, \dots, c-1$. Тест-статистикой является оценка

$$I = \sum_{l=1}^{c-1} \mathbb{E} [m(x, z = l) - m(x, z = 0)]^2.$$

Очевидно, $I \geq 0$, и $I = 0$ тогда и только тогда, когда H_0 верна. Значит, I служит адекватной мерой для тестирования H_0 . Доступная тест-статистика имеет вид

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{c-1} [\hat{m}(X_i, Z_i = l) - \hat{m}(X_i, Z_i = 0)]^2, \quad (32)$$

где $\hat{m}(X_i, Z_i = l)$ – локально постоянная или локально линейная регрессионная оценка, описанная в главе *Регрессия*.

Легко показать, что I_n является состоятельной оценкой I . Следовательно, $I_n \rightarrow 0$ по вероятности при H_0 , и $I_n \rightarrow I > 0$ по вероятности при H_1 . Для получения распределения этой статистики при нулевой гипотезе или ее стьюдентизированной версии Racine, Hart & Li (2007) предложили две бутстраповские процедуры, обе из которых имеют хорошие свойства в конечных выборках; см. подробности в Racine, Hart & Li (2007).

7.2.2 Непрерывные регрессоры

Похожим образом нулевую гипотезу при тестировании на значимость непрерывного регрессора можно записать в виде

$$H_0 : \mathbb{E}[y|x, z] = \mathbb{E}[Y|z] \text{ почти везде,}$$

что эквивалентно

$$H_0 : \frac{\partial \mathbb{E}[y|x, z]}{\partial x} = \beta(x) = 0 \text{ почти везде}$$

Тест-статистикой является оценка

$$I = \mathbb{E}[\beta(x)^2]. \quad (33)$$

Тест-статистику можно получить, подсчитав выборочное среднее I с заменой неизвестных производных их непараметрическими оценками $\hat{\beta}(x_i)$, как описано в Racine (1997), то есть

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\beta}(X_i)^2, \quad (34)$$

где $\hat{\beta}(X_i)$ – локально постоянная или локально линейная оценка частной производной, которые описаны в разделе *Регрессия*.

Легко показать, что I_n является состоятельной оценкой I . Следовательно, $I_n \rightarrow 0$ по вероятности при H_0 , и $I_n \rightarrow I > 0$ по вероятности при H_1 . Для получения распределения этой статистики при нулевой гипотезе или ее студентизированной версии можно использовать бутстраповские процедуры; см. подробности в Racine (1997).

Иллюстрация

Рассмотрим набор данных “wage1” ($n = 526$) из учебника Wooldridge (2002), который содержит смесь непрерывных и категориальных регрессоров, и применим тесты на значимость, описанные выше. Результаты представлены в таблице 12, а р-значения указывают на значимость всех переменных на обычном 5%-ом уровне.

Таблица 12: Результаты теста на значимость для непараметрического локально линейного уравнения почасовой заработной платы.

```
Kernel Regression Significance Test
Type I Test with IID Bootstrap (399 replications)
Explanatory variables tested for significance:
factor(female) (1), factor(married) (2), educ (3), exper (4), tenure (5)

                factor(female) factor(married)   educ   exper   tenure
Bandwidth(s):    0.01978275      0.1522889 7.84663 8.435482 41.60546

Significance Tests
P Value:
factor(female) < 2.22e-16 ***
factor(married) 0.0150376 *
educ             < 2.22e-16 ***
exper           < 2.22e-16 ***
tenure          0.0075188 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

8 Соображения по поводу вычислений

Ирония данной области эконометрики заключается в том, что ядерные методы по своей природе часто являются настолько вычислительно трудными, что большинство исследователей не стремятся применять их в тех случаях, для которых они идеально подходят, а именно когда наблюдается чрезвычайное изобилие данных, например, при оценке панельных микроданных, высокочастотных финансовых данных и т.д.

Для небольших наборов данных вычислительные трудности, связанные с ядерными методами, редко бывают проблемой. Тем не менее, для средних и больших наборов данных

вычисления, требуемые для реализации диктуемых данными методов выбора ширины окна, легко выходят из-под контроля. Естественно, интерес представляет общая задача ядерного оценивания, включающая оценивание безусловной и условной плотности, регрессии и производных как для категориальных, так и для непрерывных данных, и такая, которая использует ряд ядерных функций и методов выбора ширины окна.

Существует множество подходов к снижению вычислительного бремени, связанного с ядерными методами. На настоящий момент нам неизвестны методы, позволяющие осуществлять вычисления в рамках общей задачи ядерного оценивания в режиме реального времени или близкие к тому. Обсудим кратко некоторые подходы, существующие на данный момент, и другие, дающие надежду на прорыв, который позволит проводить ядерное оценивание в режиме реального времени с помощью обычного настольного или переносного компьютера.

Использование биннинговых методов

Использование биннинга дало множество вычислительно очень привлекательных оценок. Биннингом называют метод приближенных вычислений, когда данные предварительно сортируют на равномерной сетке, а затем к этим данным применяют подходящим образом модифицированную оценку. Например, биннинговые методы были предложены в Scott (1985), где для гладкого непараметрического оценивания плотности применяются усредненные сдвинутые гистограммы (ASH), а Scott & Sheather (1985) исследуют точность биннинговых методов при ядерном оценивании плотности.

Использование преобразований

На с. 61–66 в Silverman (1986) описано применение быстрых преобразований Фурье (FFT) для эффективного вычисления оценок (одномерной) плотности. Этот подход ограничивает оценивание сеткой точек (например, 512), чтобы ускорить скорость вычислений. Elgammal, Duraiswami & Davis (2003) обсуждают использование быстрых преобразований Гаусса (FGT) для эффективного вычисления ядерных оценок плотности с гауссовским ядром.

Использование параллелизма

Racine (2002) использует как параллельную природу большинства непараметрических методов, так и наличие нескольких вычислительных сред для достижения существенного снижения времени вычислений.

Использование многополюсных методов и методов ветвления

Две недавние разработки в области быстрых многополюсных методов и методов ветвления дают надежду на возможность общего ядерного оценивания в режиме реального времени. Чтобы расширить эти недавние разработки на случай общей задачи ядерного оценивания, надо, однако, проделать значительный объем работы. Многополюсные методы и методы ветвления были разработаны только для оценивания безусловной плотности и только для непрерывных данных.

Многополюсные методы представляют собой группу методов приближенных вычислений, обычных для задач в теории потенциального поля, когда n точек взаимодействуют в соответствии с некоторой потенциальной функцией, а целью является вычисление поля в произвольных точках (Greengard, 1988; Greengard & Strain, 1991). Для ускорения работы эти алгоритмы используют тот факт, что все вычисления требуется выполнить лишь с определенной степенью точности.

Методы ветвления можно представить себе как более мощные обобщения сетки, представляющие собой множество связанных сеток, построенных на разных разрешениях. Эта техника позволяет применение подхода «разделяй и властвуй», который может интегрировать локальную информацию для получения глобального решения, имеющего заданную точечную точность (Gray & Moore, 2003). Если kd -деревьям свойственно то, что представление в виде сетки имеет сложность, экспоненциально растущую с размерностью q , это не так для шаровидных методов ветвления (ball-trees), которые применялись в ситуациях с буквально тысячами размерностей.

Вызовы будущего

Святым граалем прикладного ядерного оценивания является разработка и реализация библиотеки, которая стала бы основой программного пакета, имеющего возможности, скажем, пакета `np`, но кроме этого использующего вычислительные преимущества лучших из перечисленных выше методов. Это, конечно, грандиозный проект, но он был бы тепло принят исследовательским сообществом.

9 Программное обеспечение

Для желающих заняться непараметрическим моделированием существует ряд возможностей. Ни один из известных нам программных пакетов не является универсальным, у них у всех не хватает функциональности. Во многих реализованы методы для двумерной плотности и регрессии, но недоступно оценивание объектов более высоких размерностей, тогда как другие пакеты подходят для более высоких размерностей, но в остальном имеют узкую сферу применения. Список, приведенный ниже, не представляет собой рекламу и не является исчерпывающим. Это лишь отправная точка для заинтересованного читателя.

- **EasyReg** (econ.la.psu.edu/~hbierens/EASYREG.HTM) – программа для регрессионного анализа в среде Microsoft Windows, содержащая модуль для оценивания непараметрической ядерной регрессии с одной или двумя объясняющими переменными.
- **Limdep** (www.limdep.com) содержит, среди прочего, модули для ядерного оценивания плотности.
- **R** (www.r-project.org) содержит библиотеки, реализующие ряд ядерных методов, включая базовую библиотеку `stats`, библиотеки `KernSmooth` и `np`.
- **SAS** (www.sas.com) содержит модули для оценивания ядерной регрессии, локально взвешенного сглаживания и ядерного оценивания плотности.
- **Stata** (www.stata.com) содержит некоторые модули для оценивания одномерной и двумерной плотности и некоторые модули для оценивания локально постоянной ядерной регрессии.
- **TSP** (www.tspintl.com) содержит процедуры для оценивания одномерной плотности и простой ядерной регрессии.

10 Заключение

Непараметрические методы ядерного сглаживания за последние годы испытали огромный рост. Они применяются исследователями-практиками в целом ряде дисциплин. Непараметрические ядерные подходы представляют собой множество потенциально полезных методов для тех, кто вынужден сталкиваться с неприятной проблемой неправильной спецификации

параметрической модели. Привлекательность непараметрических методов состоит, главным образом, в их устойчивости к неправильной спецификации функциональных форм, в отличие от параметрических моделей. Хотя лежащая в основе многих из этих методов теория может показаться устрашающей для практика, мы попытались показать, как применять ряд непараметрических методов весьма непосредственным образом. Мы избегали всякой попытки энциклопедического покрытия всей области и вместо этого попытались направить заинтересованного читателя к учебникам, упомянутым во введении, и, конечно, оригинальным статьям из научных журналов. Представляя ряд полупараметрических и параметрических моделей, подходящих для множества прикладных задач, мы надеемся, что нам удалось воодушевить заинтересованных читателей на применение некоторых из этих методов в конкретных сферах их интересов.

Мы постарались подчеркнуть тот факт, что непараметрические ядерные методы могут быть вычислительно трудными, особенно при обработке большого объема данных. Это происходит из-за того, что на практике необходимо применение диктуемых данными методов выбора ширины окна, а скорость выполнения таких алгоритмов экспоненциально растет с объемом доступных данных. Тем не менее, как отмечено в разделе *Соображения по поводу вычислений*, существуют методы приближенных вычислений, которые имеют возможность значительно снизить объем необходимых вычислений, и мы поддерживаем всех тех, кто хочет внести свой вклад в эту область, так как их усилия были бы особенно полезны для практиков.

Благодарности

Я выражаю благодарность Биллу Грину (Bill Greene), Заку Ролнику (Zac Rolnick) и анонимному рецензенту за их образцовую редакторскую помощь и руководство. Я также хотел бы выразить признательность своим многочисленным соавторам и в особенности моему другу и соавтору Кви Ли (Qi Li), с которым я имел удовольствие успешно сотрудничать.

Наконец, я также хотел бы поблагодарить Единую иерархическую вычислительную сеть для академических исследований (SHARCNET:www.sharcnet.ca) за непрекращающуюся поддержку. Я также глубоко благодарен за финансовую поддержку Канадской программе поддержки исследований в области естественных и инженерных наук (NSERC:www.nserc.ca) и Канадской программе поддержки исследований в области общественных и гуманитарных наук (SSHRC:www.sshrc.ca).

Список литературы

- Abramson, I.S. (1982). On bandwidth variation in kernel estimates – a square root law. *Annals of Statistics* 10, 1217–1223.
- Aitchison, J. & C.G.G. Aitken (1976). Multivariate binary discrimination by the kernel method. *Biometrika* 63, 413–420.
- Azzalini, A. & A.W. Bowman (1997). *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis: The Kernel Approach with S-plus Illustrations*. New York: Oxford University Press.
- Bickel, P.J., C.A.J. Klaassen, Y. Ritov & J.A. Wellner (1993). *Efficient and Adaptive Estimation for Semiparametric Models*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- Bowman, A.W. (1984). An alternative method of cross-validation for the smoothing of density estimates. *Biometrika* 71, 353–360.
- Bowman, A.W., P. Hall & T. Prvan (1998). Bandwidth selection for the smoothing of distribution functions. *Biometrika* 85, 799–808.
- Breiman, L., W. Meisel & E. Purcell (1977). Variable kernel estimates of multivariate densities. *Technometrics* 19, 135–144.

- Cameron, A.C. & P.K. Trivedi (1998). *Regression Analysis of Count Data*. New York: Cambridge University Press.
- Cantoni, E. & E. Ronchetti (2001). Resistant selection of the smoothing parameter for smoothing splines. *Statistics and Computing* 11, 141–146.
- Cheng, M.-Y., P. Hall & D. Titterton (1997). On the shrinkage of local linear curve estimators. *Statistics and Computing* 7, 11–17.
- Čížek, P. & W. Härdle (2006). Robust estimation of dimension reduction space. *Computational Statistics & Data Analysis* 51, 545–555.
- Cleveland, W.S. (1979). Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots. *Journal of American Statistical Association* 74, 829–836.
- Croissant, Y. (2006). *Ecdat: Data sets for econometrics*. R package version 0.1–5. URL: <http://www.r-project.org>
- Croissant, Y. & G. Millo (2007). *plm: Linear models for panel data*. R package version 0.2–2. URL: <http://www.r-project.org>
- Delgado, M.A. & W.G. Manteiga (2001). Significance testing in nonparametric regression based on the bootstrap. *Annals of Statistics* 29, 1469–1507.
- Devroye, L. & L. Györfi (1985). *Nonparametric Density Estimation: The L^1 View*. New York: Wiley.
- Donald, S.G. (1997). Inference concerning the number of factors in a multivariate nonparametric relationship. *Econometrica* 65, 103–131.
- Draper, N. (1987). *Empirical Model-Building and Response Surfaces*. New York: Wiley.
- Efromovich, S. (1999). *Nonparametric Curve Estimation: Methods, Theory and Applications*. New York: Springer Verlag.
- Efron, B. (1982). *The Jackknife, the Bootstrap, and Other Resampling Plans*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Elgammal, A., R. Duraiswami & L. Davis (2003). The fast gauss transform for efficient kernel density evaluation with applications in computer vision. *IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*.
- Epanechnikov, V.A. (1969). Nonparametric estimation of a multidimensional probability density. *Theory of Applied Probability* 14, 153–158.
- Eubank, R.L. (1999). *Nonparametric Regression and Spline Smoothing*, 2nd edition. New York: Marcel Dekker.
- Fan, J. (1992). Design-adaptive nonparametric regression. *Journal of American Statistical Association* 87, 998–1004.
- Fan, J. & I. Gijbels (1996). *Local Polynomial Modelling and Its Applications*. London: Chapman and Hall.
- Fan, J. & J. Jiang (2000). Variable bandwidth and one-step local m-estimator. *Science in China, Series A* 43, 65–81.
- Fan, J. & Q.W. Yao (2005). *Nonlinear time series: Nonparametric and Parametric Methods*. New York: Springer Verlag.
- Faraway, J. & M. Jhun (1990). Bootstrap choice of bandwidth for density estimation. *Journal of the American Statistical Association* 85, 1119–1122.
- Fix, E. & J.L. Hodges (1951). Discriminatory analysis. Nonparametric estimation: Consistency properties. Technical Report, USAF School of Aviation Medicine, Randolph Field.
- Fox, J. (2002). *An R and S-PLUS Companion to Applied Regression*. Thousand Oaks: Sage.
- Geary, R. (1947). Testing for normality. *Biometrika* 34, 209–242.
- Geisser, S. (1975). A predictive sample reuse method with application. *Journal of American Statistical Association* 70, 320–328.
- Gray, A. & A.W. Moore (2003). Very fast multivariate kernel density estimation via computational geometry. In: *Proceedings Joint Statistical Meeting, Aug 3–7, 2003*.
- Greene, W.H. (2003). *Econometric Analysis*, 5th edition. Upper Saddle River: Prentice Hall.
- Greengard, L. (1988). *The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems*. Cambridge: MIT Press.
- Greengard, L. & J. Strain (1991). The fast gauss transform. *Journal of Science and Computation* 12, 79–94.

- Hall, P., Q. Li & J.S. Racine (в печати). Nonparametric estimation of regression functions in the presence of irrelevant regressors. *Review of Economics and Statistics*.
- Hall, P., J.S. Racine & Q. Li (2004). Cross-validation and the estimation of conditional probability densities. *Journal of American Statistical Association* 99, 1015–1026.
- Härdle, W. (1990). *Applied Nonparametric Regression*. New York: Cambridge University Press.
- Härdle, W. & E. Mammen (1993). Comparing nonparametric versus parametric regression fits. *Annals of Statistics* 21, 1926–1947.
- Härdle, W., M. Müller, S. Sperlich & A. Werwatz (2004). *Nonparametric and Semiparametric Models*. Berlin: Springer Verlag.
- Hart, J.D. (1997). *Nonparametric Smoothing and Lack-of-Fit Tests*. New York: Springer Verlag.
- Hastie, T. & A. Tibshirani (1993). Varying-coefficient models. *Journal of Royal Statistical Society, Series B* 55, 757–796.
- Hayfield, T. & J.S. Racine (2007). *np: Nonparametric kernel smoothing methods for mixed datatypes*. R package version 0.13–1.
- Henderson, D., R.J. Carroll & Q. Li (2006). Nonparametric estimation and testing of fixed effects panel data models. Manuscript, Texas A&M University.
- Hodges, J.L. & E.L. Lehmann (1956). The efficiency of some nonparametric competitors of the t-test. *Annals of Mathematical Statistics* 27, 324–335.
- Hoerl, A. & R. Kennard (1970). Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics* 12, 55–67.
- Horowitz, J.L. (1998). *Semiparametric Methods in Econometrics*. New York: Springer-Verlag.
- Horowitz, J.L. & W. Härdle (1994). Testing a parametric model against a semiparametric alternative. *Econometric Theory* 10, 821–848.
- Horowitz, J.L. & V.G. Spokoiny (2001). An adaptive, rate-optimal test of a parametric mean-regression model against a nonparametric alternative. *Econometrica* 69, 599–631.
- Hristache, M., A. Juditsky & V. Spokoiny (2001). Direct estimation of the index coefficient in a single-index model. *Annals of Statistics* 29, 595–623.
- Hsiao, C., Q. Li & J.S. Racine (2007). A consistent model specification test with mixed categorical and continuous data. *Journal of Econometrics* 140, 802–826.
- Huber, P.J. (1964). Robust estimation of a location parameter. *Annals of Statistics* 35, 73–101.
- Hurvich, C.M., J.S. Simonoff & C.L. Tsai (1998). Smoothing parameter selection in nonparametric regression using an improved Akaike information criterion. *Journal of Royal Statistical Society, Series B* 60, 271–293.
- Ichimura, H. (1993). Semiparametric least squares (SLS) and weighted SLS estimation of single-index models. *Journal of Econometrics* 58, 71–120.
- Johnston, J. & J. DiNardo (1997). *Econometric Methods*, 4th edition. McGraw-Hill.
- Klein, R.W. & R.H. Spady (1993). An efficient semiparametric estimator for binary response models. *Econometrica* 61, 387–421.
- Lavergne, P. & Q. Vuong (1996). Nonparametric selection of regressors: The nonnested case. *Econometrica* 64, 207–219.
- Leung, D. (2005). Cross-validation in nonparametric regression with outliers. *Annals of Statistics* 33, 2291–2310.
- Li, Q. & J.S. Racine (2007a). *Nonparametric Econometrics: Theory and Practice*. Princeton University Press.
- Li, Q. & J.S. Racine (2007b). Smooth varying-coefficient nonparametric models for qualitative and quantitative data. Manuscript, Texas A&M University.
- Li, Q. & J.S. Racine (2003). Nonparametric estimation of distributions with categorical and continuous data. *Journal of Multivariate Analysis* 86, 266–292.
- Li, Q. & J.S. Racine (2004). Cross-validated local linear nonparametric regression. *Statistica Sinica* 14, 485–512.
- Li, Q. & J.S. Racine (в печати). Nonparametric estimation of conditional CDF and quantile functions with mixed categorical and continuous data. *Journal of Business & Economic Statistics*.

- Loader, C.R. (1999). Bandwidth selection: Classical or plug-in? *Annals of Statistics* 27, 415–438.
- Manski, C.F. (1988). Identification of binary response models. *Journal of American Statistical Association* 83, 729–738.
- Maronna, A., R. Martin & V. Yohai (2006). *Robust Statistics: Theory and Methods*. Wiley.
- Nadaraya, E.A. (1965). On nonparametric estimates of density functions and regression curves. *Theory of Applied Probability* 10, 186–190.
- Pagan, A. & A. Ullah (1999). *Nonparametric Econometrics*. New York: Cambridge University Press.
- Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics* 33, 1065–1076.
- Prakasa Rao, B.L.S. (1983). *Nonparametric Functional Estimation*. Orlando: Academic Press.
- R Development Core Team (2007). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna. URL: <http://www.R-project.org>.
- Racine, J. (2002). Parallel distributed kernel estimation. *Computational Statistics and Data Analysis* 40, 293–302.
- Racine, J.S. (1997). Consistent significance testing for nonparametric regression. *Journal of Business & Economic Statistics* 15, 369–379.
- Racine, J.S., J.D. Hart & Q. Li (2006). Testing the significance of categorical predictor variables in nonparametric regression models. *Econometric Reviews* 25, 523–544.
- Racine, J.S. & Q. Li (2004). Nonparametric estimation of regression functions with both categorical and continuous data. *Journal of Econometrics* 119, 99–130.
- Racine, J.S. & L. Liu (2007). A partially linear kernel estimator for categorical data. Manuscript, McMaster University.
- Robinson, P.M. (1988). Root-n consistent semiparametric regression. *Econometrica* 56, 931–954.
- Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics* 27, 832–837.
- Rudemo, M. (1982). Empirical choice of histograms and kernel density estimators. *Scandinavian Journal of Statistics* 9, 65–78.
- Ruppert, D., R.J. Carroll & M.P. Wand (2003). *Semiparametric Regression Modeling*. New York: Cambridge University Press.
- Ruppert, D., S.J. Sheather & M.P. Wand (1995). An effective bandwidth selector for local least squares regression. *Journal of American Statistical Association* 90, 1257–1270.
- S original by Matt Wand. R port by Brian Ripley. (2007). KernSmooth: Functions for kernel smoothing for Wand & Jones (1995). R package version 2.22–21. URL: <http://www.maths.unsw.edu.au/wand>
- Scott, D.W. (1985). Averaged shifted histograms: Effective nonparametric density estimators in several dimensions. *Annals of Statistics* 13, 1024–1040.
- Scott, D.W. (1992). *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*. New York: Wiley.
- Scott, D.W. & S.J. Sheather (1985). Kernel density estimation with binned data. *Communication in Statistics: Theory and Methods* 14, 1353–1359.
- Seifert, B. & T. Gasser (2000). Data adaptive ridging in local polynomial regression. *Journal of Computational and Graphical Statistics* 9, 338–360.
- Sheather, S. & M. Jones (1991). A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimation. *Journal of Royal Statistical Society, Series B* 53, 683–690.
- Silverman, B.W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. New York: Chapman and Hall.
- Simonoff, J.S. (1996). *Smoothing Methods in Statistics*. New York: Springer Verlag.
- Stone, C.J. (1974). Cross-validatory choice and assessment of statistical predictions (with discussion). *Journal of Royal Statistical Society* 36, 111–147.
- Stone, C.J. (1977). Consistent nonparametric regression. *Annals of Statistics* 5, 595–645.
- Venables, W.N. & B.D. Ripley (2002). *Modern Applied Statistics with S*, 4th edition. New York: Springer Verlag.

- Wand, M.P. & M.C. Jones (1995). *Kernel Smoothing*. London: Chapman and Hall.
- Wang, F. & D. Scott (1994). The l_1 method for robust nonparametric regression. *Journal of American Statistical Association* 89, 65–76.
- Wang, M.C. & J. van Ryzin (1981). A class of smooth estimators for discrete distributions. *Biometrika* 68, 301–309.
- Wang, N. (2003). Marginal nonparametric kernel regression accounting for within-subject correlation. *Biometrika* 90, 43–52.
- Wang, N., R.J. Carroll & X. Lin (2005). Efficient semiparametric marginal estimation for longitudinal/clustered data. *Journal of American Statistical Association* 100, 147–157.
- Watson, G.S. (1964). Smooth regression analysis. *Sankhya* 26, 359–372.
- Wooldridge, J.M. (2002). *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. Cambridge: MIT Press.
- Wooldridge, J.M. (2003). *Introductory Econometrics*. Mason: Thompson South-Western.
- Yatchew, A.J. (2003). *Semiparametric Regression for the Applied Econometrician*. New York: Cambridge University Press.

Nonparametric econometrics: a primer

Jeffrey S. Racine

McMaster University, Hamilton, Canada

This article is a primer for those who wish to familiarize themselves with nonparametric econometrics. Though the underlying theory for many of these methods can be daunting for some practitioners, this article will demonstrate how a range of nonparametric methods can in fact be deployed in a fairly straightforward manner. Rather than aiming for encyclopedic coverage of the field, we shall restrict attention to a set of touchstone topics while making liberal use of examples for illustrative purposes. We will emphasize settings in which the user may wish to model a dataset comprised of continuous, discrete, or categorical data (nominal or ordinal), or any combination thereof. We shall also consider recent developments in which some of the variables involved may in fact be irrelevant, which alters the behavior of the estimators and optimal bandwidths in a manner that deviates substantially from conventional approaches.

Отсутствие гладкости при непараметрическом оценивании*

Виктория Зинде-Уолш[†]

Университет МакГилл, Монреаль, Канада

Непараметрические оценки широко используются в статистике и эконометрике, при этом большая часть асимптотических результатов опирается на предположения о гладкости функции распределения; эти предположения могут не выполняться на практике. Нарушение предположений о гладкости распределения может иметь такие последствия, как неправильный выбор ширины окна, наличие серьезного асимптотического смещения и ошибок при тестировании. Подход, заключающийся в оптимальном комбинировании нескольких непараметрических оценок, каждая со своей парой ядро/ширина окна, может автоматически достичь (неизвестной заранее) оптимальной скорости сходимости. Этот метод был применен к ядерной оценке плотности распределения, к оценке усредненных производных, а также к сглаженной оценке максимальных очков в модели бинарного выбора. В крайнем случае, когда функция плотности не существует, ядерная оценка «оценивает» несуществующую функцию; тем не менее, ее предельное распределение можно полностью охарактеризовать с помощью обобщенных (в смысле обобщенных функций) Гауссовых процессов. Проверка гипотез о существовании плотности и ее гладкости – вопрос пока что малоисследованный; обсуждаются некоторые предварительные результаты.

1 Введение

Непараметрические оценки широко используются в статистике и эконометрике, при этом большая часть асимптотических результатов опирается на предположения о гладкости функции распределения. Однако зачастую на практике эти предположения могут не выполняться. Вмешательство в экономику государства и других регулирующих органов в форме, например, трансфертов или различных ставок процентов и налогов ведет к нарушению гладкости в функциях плотности распределения или даже в самом распределении соответствующих экономических процессов; подобное влияние на наблюдаемые переменные могут оказывать и особенности естественных или технологических процессов (например, необходимость полностью разгрузить электрический генератор при продаже электроэнергии). Нарушение предположений о гладкости распределения может иметь важные последствия для статистического оценивания и проверки гипотез, такие как неправильный выбор ширины окна, который приведет к замедленной (по сравнению с оптимальной) скорости сходимости, наличие серьезного асимптотического смещения и, возможно, к ошибкам при тестировании.

В последнее время были разработаны новые методы, цель которых – предохранить исследователя от ошибок, проистекающих либо от недостаточной гладкости, либо от неправильных предположений о гладкости. При условии существования функции плотности, но, возможно, не непрерывной, или непрерывной, но с неизвестным (и, возможно, недостаточным для стандартной асимптотики) количеством производных, этот подход заключается в

*Автор благодарит за поддержку Social Sciences and Humanities Research Council of Canada и Fonds Québécois de la Recherche sur la Société et la Culture. Цитировать как: Зинде-Уолш, Виктория (2008) «Отсутствие гладкости при непараметрическом оценивании», Квантиль, №4, стр. 57–69. Citation: Zinde-Walsh, Victoria (2008) “Consequences of lack of smoothness in nonparametric estimation,” *Quantile*, No.4, pp. 57–69.

[†]Адрес: Department of Economics, 855 Sherbrooke Street West, Montreal, Quebec, H3A 2T7, Canada. Электронная почта: victoria.zinde-walsh@mcgill.ca

оптимальном комбинировании нескольких непараметрических оценок, каждая со своей парой ядро/ширина окна; оказывается, что такая комбинация может автоматически достичь (неизвестной заранее) оптимальной скорости сходимости, в частности, за счет снижения смещения (Kotlyarova & Zinde-Walsh, 2006). Этот метод был применен к ядерной оценке плотности распределения (Kotlyarova & Zinde-Walsh, 2007), к оценке усредненных производных (например, для индексовой модели) (Schafgans & Zinde-Walsh, 2007), а также к сглаженной оценке максимальных очков в модели бинарного выбора (Kotlyarova & Zinde-Walsh, 2004). Во всех исследованных случаях методы Монте-Карло подтверждают надежность комбинированного оценивания, в то время как общеизвестные способы оценивания могут приводить к существенным ошибкам для различных (даже гладких, но с несколькими пиками, например, смешанных нормальных) распределений. Подобная стратегия комбинирования (взвешенных) оценок рекомендуется и в других непараметрических оценках, как, например, в оценке параметра в моделях с долгой памятью (Guggenberger & Sun, 2006).

В случае, когда функция плотности не определена (распределение имеет сингулярности), ядерная оценка оценивает несуществующую функцию плотности; тем не менее ее предельное распределение можно полностью охарактеризовать с помощью обобщенных (в смысле обобщенных функций) Гауссовых процессов, введенных Гельфандом и Виленкиным (1961). Эти асимптотические результаты (Zinde-Walsh, 2008) дают возможность построения доверительных интервалов и тестирования. Интересно, что сингулярность в функции распределения не всегда ведет к отрицательным последствиям для оценки: например, сходимость условного ожидания ускоряется в точках сингулярности.

Очевидно, было бы желательно иметь тест для определения степени гладкости. Имеются тесты для определения фиксированных точек на сингулярность; эти тесты базируются на использовании специальных ядер; они получили распространение, начиная с работы Müller (1992). Общий тест на сингулярность был предложен в Frigyesi & Hössjer (1998), однако для практического применения этот тест малоприменим, так как даже для выбора между вполне обычным абсолютно непрерывным распределением (χ^2) и сингулярным, равномерным на равноотстоящих друг от друга ста точках в интервале (0,1), требуется огромная (несколько тысяч) выборка. Новый тест (Zinde-Walsh & Galbraith, 2007), основанный на асимптотической теории в Zinde-Walsh (2008), позволяет различать классы функций с различными характеристиками гладкости: тестовая статистика имеет стандартное нормальное асимптотическое распределение для любой непрерывной функции плотности, но стремится к бесконечности при наличии сингулярности. Тесты также позволяют различать классы функций с разным количеством непрерывных производных.

В следующем разделе приведены примеры, иллюстрирующие причины, по которым негладкие и сингулярные распределения встречаются на практике. Раздел 3 объясняет общие свойства комбинированной оценки, особенности ее практического построения и результаты для таких моделей, как индексовая модель, модель бинарного выбора, и просто для оценки плотности вероятности. В разделе 4 приводятся результаты для случая, когда (в каких-то точках) функция распределения, возможно, не существует.

2 Примеры сингулярных распределений и негладких функций плотности

Многие прикладные исследователи сталкиваются с проблемой сингулярности в распределениях наблюдаемых величин; это общеизвестные случаи в биологических и медицинских статистиках (например, пики риска смертности после инфаркта или младенца после родов); в экономических исследованиях также встречаются точечные веса, например, в проработанных неделях в связи с определенными ограничениями на право получения пособия по безработице (см. Green & Riddell, 1997). Также встречаются и негладкие или даже не непрерывные функции плотности.

Приведенные ниже примеры иллюстрируют причины, по которым распределения данных, таких как предложение труда, доходы от заработка, потребление и совместное распределение предложения труда мужчин и женщин, могут быть негладкими, например в результате одновременного трансферта. Более реалистичные формы пособий, сложные правила налогообложения приводят к менее очевидным нарушениям гладкости распределений.

Предположим, что семья предлагает рабочую силу в объеме y , где $0 \leq y \leq \bar{y}$, и \bar{y} имеет в популяции функцию распределения $F_{\bar{y}}(\cdot)$ (по предположению, достаточно гладкую) и плотность $f_{\bar{y}}(\cdot)$. Пусть y^* – величина предложения рабочей силы (равного заработанному доходу), а c – величина располагаемого дохода (равного потреблению). Семья максимизирует потребление c . Если $c(y) = y$, то $y^* = \bar{y}$. Теперь предположим, что трансферт в размере t предлагается при доходе, не превышающем y_t ; тогда

$$c(y) = \begin{cases} y + t, & \text{если } y \leq y_t, \\ y, & \text{если } y > y_t. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Непредусмотренный трансферт. Предложение труда по-прежнему $y^* = \bar{y}$, но $c(y^*)$ определяется (1); функция распределения располагаемого дохода такова, что функция плотности разрывна:

$$f_c(c) = \begin{cases} f_{\bar{y}}(c - t), & \text{если } c \leq y_t, \\ f_{\bar{y}}(c - t) + f_{\bar{y}}(c), & \text{если } y_t < c \leq y_t + t, \\ f_{\bar{y}}(c), & \text{если } c > y_t + t. \end{cases}$$

Случай 2. Предусмотренный трансферт. В таком случае предложение рабочей силы меняется, чтобы максимизировать c в (1):

$$y^* = \begin{cases} \bar{y}, & \text{если } \bar{y} \leq y_t \text{ или } \bar{y} > y_t + t, \\ y_t, & \text{если } y_t < \bar{y} \leq y_t + t. \end{cases}$$

Тогда функция распределения предложения труда (и заработка) для семьи принимает вид

$$F_{y^*}(y^*) = F_{\bar{y}}(y^* - t)\mathbb{I}_{[y^* < y_t]} + [F_{\bar{y}}(y_t) - F_{\bar{y}}(y_t - t)]I(y^* = y_t) + F_{\bar{y}}(y^*)\mathbb{I}_{[y^* > y_t]},$$

где индикатор $\mathbb{I}_{[a]} = 1$, когда a верно, 0 в противном случае. Это распределение сингулярно (с точечным весом). Если рассмотреть при этих условиях совместное распределение предложения рабочей силы мужчин и женщин, веса могут быть как в отдельных точках, так и на одномерных подмножествах в зависимости от того, как принимаются совместные решения в семьях.

Дополнительный пример можно найти в олигополистических ценах на запасы электричества, где весовые точки обусловлены тем, что продажа осуществляется в количествах, соответствующих полной разгрузке генератора.

3 Проблемы недостаточной гладкости и комбинированные оценки

В этой части статьи мы исследуем вопрос, как наилучшим образом строить ядерные непараметрические оценки, когда функция плотности существует, но ее гладкость неизвестна.

3.1 Некоторые общие результаты

Допустим, мы имеем дело с ядерной непараметрической оценкой; такая оценка требует выбора функции ядра K и ширины окна h ; в результате такого выбора получается оценка $b(h, K)$. Выбирая разные окна h_t , $t = 1, \dots, m$, и ядра K_s , $s = 1, \dots, l$; получаем разные оценки $b(t, s)$.

Обычно асимптотические результаты для такой оценки (в зависимости от свойств ядра и окна) выражаются в одной из следующих форм.

A1(1). Преобладание асимптотического смещения:

$$r(t, s)(b(t, s) - \beta) - A(t, s) \xrightarrow{P} 0;$$

A1(2). Предельное нормальное распределение (со смещением):

$$r(t, s)(b(t, s) - \beta) \xrightarrow{d} N(A(t, s), \Gamma(t, s));$$

A1(3). Предельное нормальное распределение (без смещения): A1(2) с $A(t, s) = 0$.

Выбор K и h обычно основывается на предположении о гладкости функции плотности. Когда нет уверенности в гладкости, выбор ядра и ширины окна, основывающийся на возможно ложных предположениях, может привести к ошибке.

Для разработки комбинированной оценки Kotlyarova & Zinde-Walsh (2006) рассматривают совместное предельное распределение нескольких оценок с разными K и h , про которые известно только то, что реализуется один из случаев в A1; для интересующих нас оценок обычно можно доказать следующее: предельное совместное распределение $b_j (= b(t, s))$ – нормальное, но, возможно, вырожденное:

$$\begin{pmatrix} r_1(b_1 - \beta) \\ \vdots \\ r_J(b_J - \beta) \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \cdots & \Gamma_{1J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{1J} & \cdots & \Gamma_{JJ} \end{pmatrix} \right).$$

Когда $\frac{r_i}{r_j} \rightarrow \infty$ (или к 0), $\Gamma_{ij} = 0$, но также Γ_{ij} может равняться нулю и когда $\frac{r_i}{r_j} \rightarrow d \neq 0, \infty$, так что во всех этих случаях соответствующие оценки распределены асимптотически независимо. Когда b_i слишком сглажено (случай A1(1)), $\Gamma_{ii} = 0$ (вырожденное распределение); когда недостаточно сглажено (случай A1(3)), $A = 0$ (нет смещения). Совместное распределение показывает, что разные оценки могут привносить дополнительную информацию; таким образом, линейная комбинация оценок может снизить величину среднеквадратичной ошибки (СКО); это может быть особенно полезным, когда из-за отсутствия уверенности в гладкости неизвестна оптимальная скорость сходимости непараметрической оценки.

Комбинированная оценка минимизирует оценку асимптотической СКО (АСКО) и может автоматически приобрести заранее неизвестную оптимальную скорость сходимости.

Как правило, комбинированные оценки в статистических и эконометрических исследованиях построены на выпуклых комбинациях (с неотрицательными коэффициентами). Juditsky & Nemirovki (2000) рассматривают оценку, построенную на основе набора заданных оценок регрессионной функции, дающую приближение, наилучшее среди выпуклых комбинаций заданных оценок; Yang (2000) в одной из статей рассматривает выпуклую комбинацию оценок для функции регрессии, а в другой – оценок для функции плотности; Fan & Ullah (1999) рассматривают выпуклую комбинацию параметрической и непараметрической регрессионных оценок с целью предохранения от неправильно определенной функции регрессии. Однако, в недавней статье об оценивании параметра в моделях с долгой памятью Guggenberger & Sun (2006) предлагают, подобно нам, использовать и отрицательные коэффициенты для уменьшения смещения оценки.

Чтобы сформулировать общий результат, определим вектор b , включающий все оценки (векторов) параметров, каждая из которых получена на основе какой-то пары ядро/окно:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_J \end{pmatrix},$$

и соответственно вектор $a : a' \iota = 1$; если $a \rightarrow \bar{a}$, то $a'b \sim N(\sum_j \bar{a}_j \tilde{A}_j, \sum_{i,j} \bar{a}_i \bar{a}_j \tilde{\Gamma}_{ij})$. Тогда

$$АСКО(a'b) = \sum_{i,j} a_i a_j (\tilde{A}'_i \tilde{A}_j + \text{tr} \tilde{\Gamma}_{ij}) = a' D a = a'_I D^I a_I + a'_{II} D^{II} a_{II},$$

где матрица D^I обратима и включает не более, чем одну оценку типа А1(1) (со смещением); D^{II} соответствует оценкам типа А1(1); $rk(D^{II}) = 1$, $\dim D^{II} \geq 2$.

Определим

$$a_n = \arg \min_a АСКО(a'b), \text{ где } a' \iota = 1; \quad (2)$$

а через D_{11} в D^I обозначим подматрицу, соответствующую наиболее быстрой скорости сходимости.

ТЕОРЕМА. Предположим, что существует предельное распределение при $n \rightarrow \infty$.

(а) Если $D \equiv D^I$, имеем $a_n = a_{\text{lim}}^I + o(1)$, где

$$a_{\text{lim}}^I = \left(\left(\frac{1}{\iota' D_{11}^{-1} \iota} D_{11}^{-1} \iota \right)', 0, \dots, 0 \right)'. \quad (3)$$

(б) Если $D \equiv D^{II}$, имеем $\inf_{a_{\text{lim}}^{II} \in \Omega} \|a_n - a_{\text{lim}}^{II}\| = o(1)$, где Ω состоит из векторов a_{lim}^{II} , для которых

$$a_{\text{lim}}^{II'} D^{II} a_{\text{lim}}^{II} = 0; \quad a_{\text{lim}}^{II'} \iota = 1. \quad (4)$$

При общем D вектор коэффициентов a стремится к оптимальной комбинации a_{lim}^I и a_{lim}^{II} . Таким образом, в случае (а) скорость сходимости совпадет с той, которая доминирует среди различных оценок, входящих в комбинацию, в случае (б) и в общем случае смещения могут взаимно сокращаться, приводя к лучшей сходимости оценки.

Примеры:

1. Две одинаково быстро сходящиеся оценки, b_1 и b_2 , обе недостаточно сглажены. Тогда

$$a_{\text{lim}} = \left(\frac{\Gamma_{22} - \Gamma_{12}}{\Gamma_{11} + \Gamma_{22} - 2\Gamma_{12}}, \frac{\Gamma_{11} - \Gamma_{12}}{\Gamma_{11} + \Gamma_{22} - 2\Gamma_{12}}, 0, \dots, 0 \right)'$$

и у комбинации АСКО ниже по сравнению с каждой индивидуальной оценкой.

2. Для недостаточно сглаженной b_1 и слишком сглаженной b_2

$$a_{\text{lim}} = \left(\frac{A_2^2}{\Gamma_{11} + A_2^2}, \frac{\Gamma_{11}}{\Gamma_{11} + A_2^2}, 0, \dots, 0 \right)',$$

$$r_1(a'_{\text{lim}} b - \beta) \xrightarrow{d} N \left(\frac{\Gamma_{11} A_2}{\Gamma_{11} + A_2^2}, \left(\frac{A_2^2}{\Gamma_{11} + A_2^2} \right)^2 \Gamma_{11} \right),$$

и у комбинации АСКО ниже по сравнению с каждой индивидуальной.

3. Две оценки, b_1 и b_2 , слишком сглаженные. Тогда

$$a_{\text{lim}} = \left(\frac{A_2}{A_2 - A_1}, -\frac{A_1}{A_2 - A_1}, 0, \dots, 0 \right)',$$

и комбинация сходится быстрее, чем каждая из оценок.

При применении оптимальной комбинации используется оценка АСКО, $\widehat{ACKO}(a'b_n)$. Комбинированная оценка определяется как

$$b_{comb} = \sum_j a_{comb_j} b_j(n),$$

где

$$a_{comb} = \arg \min_{a_n} \widehat{ACKO} \left(\sum_j a_{nj} b_j(n) \right).$$

Можно показать, что при наличии состоятельной оценки для смещения и для дисперсии

$$a_{comb} = a_{lim} + o_p(1).$$

Трудность состоит в получении состоятельных оценок, которые не основываются на предположениях о гладкости; оценки дисперсии могут быть получены разными методами, включая бутстрап. Для оценивания смещения предлагается использовать недостаточно сглаженные оценки, $b_i, i = 1, \dots, L$; тогда возможная оценка смещения задается как $b_j - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L b_i$ (несостоятельная); к ней можно применить бутстрап и увеличивать L . Для получения недостаточно сглаженных оценок можно использовать кросс-валидацию или другую предварительную оценку ширины окна, а затем его сузить; конечно, построение этих оценок зависит от конкретной задачи.

Как показывают конкретные приложения, описанные в последующих разделах, применение комбинированной оценки дает преимущества над индивидуальным выбором пары ядро/ширина окна, хотя ни для одной из них теоретическая оптимальность метода комбинированной оценки пока не доказана из-за трудностей, связанных с определением оценки смещения и выводом ее предельных свойств.

3.2 Комбинированные оценки для плотности распределения

Этот подраздел основывается на статье Kotlyarova & Zinde-Walsh (2007).

Предположим, что $(X_i), i = 1, \dots, n$, – независимая выборка из распределения X , и что функция плотности $f(x)$ непрерывна в точке x . Мы не делаем никаких предположений о гладкости этой функции. Ядро K удовлетворяет стандартным условиям $\int K(z) dz = 1$, $\int |K(z)| dz < \infty$, $|z| |K(z)| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, $\sup |K(z)| < \infty$, $\int K(z)^{2+\delta} dz < \infty$ для какой-то $\delta > 0$, но K не обязано быть симметричным или неотрицательным. Ширина окна такова, что при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ и $h_n n \rightarrow \infty$.

Ядерная оценка плотности распределения есть

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{X_i - x}{h_n} \right). \quad (5)$$

При предположениях выше оценка плотности состоятельна для СКО и имеет предельное нормальное распределение (Parzen, 1962). Известно также, что если существуют две непрерывные производные, оптимальная ширина окна для ядра второго порядка – $h_n = cn^{-\frac{1}{5}}$, и тогда скорость сходимости оценки плотности равна $O(n^{-2/5})$ (см., например, Pagan & Ullah, 1999). При существовании производных более высокого порядка сходимость может быть ускорена за счет выбора ядра более высокого порядка.

Без предположений о гладкости смещение ядерной оценки плотности равно

$$B(h_n, K, x) = \mathbb{E}[\hat{f}(x) - f(x)] = \int K(z) [f(x + zh_n) - f(x)] dz. \quad (6)$$

В этом случае без дальнейших предположений известны только общие черты предельного распределения (как в предыдущем разделе): для маленькой ширины окна нет смещения и распределение нормальное, для большой распределение вырожденное и доминирует смещение; оптимальная ширина не может быть определена без дальнейших предположений.

Kotlyarova & Zinde-Walsh (2007) исследовали построение и поведение комбинированной оценки в этих условиях. В экспериментах Монте-Карло были рассмотрены распределения с нормальной плотностью, смешанные нормальные распределения и распределения с недифференцируемой функцией плотности. Для этого набора ни один из обычно применяемых методов оценивания не привел к результатам, удовлетворительным для всех случаев. Так, например, ядро четвертого порядка с кросс-валидацией доминировало для нормального и смешанного распределений, но привело к существенной ошибке для распределения с недифференцируемой функцией плотности, где доминировало ядро второго порядка. Комбинированная оценка во всех случаях дала результаты лучше, чем неправильно выбранная обычная оценка; во многих случаях (особенно в негладком случае) комбинированная оценка приводит к меньшей СКО, чем наилучшая из обычных оценок.

3.3 Оценивание усредненных производных

Усредненные производные дают удобный способ непараметрического оценивания коэффициентов в индексных моделях, примерами которых являются линейная регрессия, Тобит-модель, модель бинарного выбора и т.п., которые могут быть представлены в виде

$$y = g(x\beta) + u.$$

При дифференцируемой функции условного ожидания можно, например, получить (в предположении что функция плотности определена):

$$\delta_0 = \mathbb{E} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x) \right] = \mathbb{E} \left[\frac{\partial g}{\partial (x\beta)}(x) f(x) \right] \beta.$$

Из этого равенства следует, что оценка вектора параметров может быть с точностью до постоянного множителя получена на основе непараметрической оценки δ_0 (усредненной взвешанной функцией плотности производной).

Оценка для δ_0 была предложена в известной статье Powell, Stock & Stoker (1989):

$$\hat{\delta}_N(K, h) = \frac{-2}{N} \sum_{i=1}^N \hat{f}'_{(K,h)}(x_i) y_i, \tag{7}$$

с

$$\hat{f}'_{(K,h)}(x_i) = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \left(\frac{1}{h} \right)^{k+1} K' \left(\frac{x_i - x_j}{h} \right),$$

где ядро K и ширина окна h такие, что $h \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. При достаточной дифференцируемости (когда непрерывны $k+2$ производные, где k – количество переменных) скорость сходимости параметрическая, несмотря на использование непараметрической оценки, и асимптотическое распределение нормальное с асимптотической дисперсией $\Sigma_{2\delta}$.

В общем случае асимптотическая дисперсия может быть представлена разложением

$$\mathbb{V}[\hat{\delta}_N(K, h)] = \Sigma_{1\delta}(K) N^{-2} h^{-(k+2)} + \Sigma_{2\delta} N^{-1} + O(N^{-2}), \tag{8}$$

и если $f(x)$ недостаточна гладкая, то может доминировать $\Sigma_{1\delta}(K) N^{-2} h^{-(k+2)}$, в результате чего скорость сходимости зависит от h . Более того, при недостаточной гладкости смещение

может преобладать, приводя к вырожденному асимптотическому распределению. Таким образом, в общем случае при неизвестной степени гладкости распределения можно только указать общие черты, отмеченные в первом подразделе.

Powell & Stoker (1996) вывели оптимальную ширину окна для минимизации СКО, когда предположения о гладкости выполнены. В общем случае Scafgans & Zinde-Walsh (2007) показали, что оптимальная ширина

$$h^{opt} = cN^{-2/(2\bar{\nu}+k+2)} \quad (9)$$

зависит от (неизвестной) степени гладкости, которая определяет и оптимальный выбор порядка ядра, и дает наилучшую скорость сходимости (параметрическую или непараметрическую).

При неизвестной степени гладкости эта скорость априори неизвестна, и Scafgans & Zinde-Walsh (2007) выводят совместное асимптотическое распределение для оценок с разными ядрами и окнами, на основе которого оправдано применение комбинированной оценки. Пример в этой статье показывает, что при определенных условиях комбинированная оценка может достигать параметрической скорости сходимости, даже если каждая из составляющих оценок сходится медленнее, чем с параметрической скоростью.

Эксперимент Монте-Карло использует тобит-модель с различными распределениями для (двух) переменных; эти распределения построены как смешанные нормальные и, хотя формально каждое из них бесконечно гладкое, некоторые производные настолько велики, что соответствующие смешанные распределения мало похожи на гладкие. Как и при оценивании функции плотности в предыдущем подразделе, ни один из индивидуальных методов оценивания не дает хороших результатов во всех случаях, для каждой индивидуальной оценки есть распределения, где СКО очень велики по сравнению с другими. В то же время комбинированная оценка дает стабильные результаты, хоть и не лучше, чем лучшая для этого случая индивидуальная оценка, но ненамного хуже, и существенно лучше, чем плохо работающая оценка.

3.4 Сглаженная оценка, основанная на максимизации очков, для модели бинарного выбора

Самая устойчивая оценка в модели бинарного выбора

$$y_i = \text{sgn}(x_i'\beta + u_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \geq 0, \\ -1, & \text{если } z < 0, \end{cases}$$

и $\mathbb{M}[u_i] = 0$, была предложена в Manski (1975). Оценка (основанная на максимизации очков) базировалась на максимизации совпадений между y_i и $\text{sgn}(x_i'\hat{b})$. Однако скорость сходимости этой оценки $O(n^{-1/3})$, и предельный процесс сложно описать.

Horowitz (1992) предложил сглаженную оценку

$$\hat{b} = \arg \max_{|b_1|=1} \frac{1}{n} \sum y_i \cdot G\left(\frac{x_i'b}{\sigma_n}\right), \quad (10)$$

где G – сглаживающая функция, производная от которой совпадает с ядром K (определенным выше). Здесь, как и в уже рассмотренных оценках, оптимальный выбор ядра и ширины окна определяется степенью гладкости распределения.

Таблица 1: СКО для оценок параметра

Размер выборки	Оценка	Гладкая модель	Негладкая модель
2000	Хоровиц	0,00026	0,00156
	<i>comb4</i>	0,00021	0,00127
	<i>comb24</i>	0,00020	0,00132
	<i>comb334</i>	0,00023	0,00131
4000	Хоровиц	0,00022	0,00130
	<i>comb4</i>	0,00012	0,00090
	<i>comb24</i>	0,00011	0,00091
	<i>comb334</i>	0,00013	0,00088

Общие результаты (Kotlyarova & Zinde-Walsh, 2004) относительно асимптотического поведения отдельных индивидуальных оценок, их совместного асимптотического распределения и поведения комбинированной оценки приложимы к этому случаю. В экспериментах Монте-Карло в Kotlyarova & Zinde-Walsh (2004) получены результаты, сходные с приведенными выше; интересно, что здесь поведение комбинированной оценки стабильно и зачастую лучше, чем для индивидуальной оценки, притом что для индивидуальной оценки использовалась предложенная Хоровицем методика поправки смещения, а в комбинации использовались неисправленные оценки. Этот факт вновь иллюстрирует преимущество комбинирования для избавления оценки от смещения.

В таблице 1 приведены некоторые из результатов оценивания параметра в модели бинарного выбора с гетероскедастичной ошибкой в случае гладкого распределения и негладкого распределения; «Хоровиц» обозначает оценку, оптимальную по методике Хоровица, *comb4*, *comb24*, *comb334* – различные комбинированные оценки; критерием является СКО.

Следует еще отметить, что комбинированные оценки стабильны еще и в том, что СКО комбинаций, основанных на разных ядрах и окнах, близки друг к другу.

4 Что известно для случая, когда функция плотности не определена?

Как видно из примеров, предположения о существовании функции плотности могут не осуществляться на практике. Возникает вопрос о поведении непараметрических оценок в этом случае, а также вопрос о возможности строить заключения о том, существует ли функция плотности (и ее производные) или нет.

4.1 Как ведут себя непараметрические оценки, когда функция плотности не определена

Если функция плотности не определена, исследователь, не зная об этом или не зная, что делать в таком случае, может строить непараметрические оценки. Таким образом, вопрос о предельном поведении таких оценок имеет смысл и для этого случая.

Результаты для ядерной оценки условного распределения для (очень специального) случая, когда распределение в окрестности точки сингулярности чисто фрактальное, исследовано в Lu (1999); автор показал, что здесь сходимость ядерной оценки быстрее, чем при условии существования плотности.

Общий подход к изучению ядерных оценок предложен в Zinde-Walsh (2008). Он основан на теории обобщенных функций. Классические книги в этой области – Гельфанд & Шилев (1958), Гельфанд & Виленкин (1961), а также главы в Соболев (1974).

Для сингулярного распределения обычная функция плотности не существует, однако всегда можно определить соответствующую обобщенную функцию как обобщенную производ-

ную обычной функции (распределения). Рассмотрим для примера одномерный случай $k = 1$. Функция распределения $F(x)$ может быть рассмотрена как функционал на пространстве D «хороших» функций, бесконечно дифференцируемых и имеющих ограниченную область определения. Определим соответствующий функционал его действием на $\psi \in D$:

$$(F, \psi) = \int F(x)\psi(x)dx, \quad (11)$$

где правая часть, очевидно, определена и задает значение функционала. Теперь определим (обобщенную) функцию плотности (как обобщенную производную от функции распределения), тоже как линейный непрерывный функционал на D :

$$(f, \psi) = (F', \psi) = -(F, \psi') = - \int F(x)\psi'(x)dx. \quad (12)$$

Поскольку правая часть этого выражения полностью определена, то и нужный функционал, определяющий f , определен. Если обычная функция f существует, то это равенство получается интегрированием по частям. Если в распределении есть весовая точка x_0 , то f пропорциональна в этой точке δ -функции Дирака:

$$(f(x), \psi(x)) = \int \delta(x - x_0)\psi(x)dx = \psi(x_0).$$

Производные (обобщенные) для функции плотности определяются аналогично:

$$(f', \psi) = -(f, \psi') = (F, \psi'') = \int F(x)\psi''(x)dx.$$

Определим также усредненную ядром K (см. Соболев, 1974, стр. 104–108) функцию $f_{hK}(x)$:

$$f_{hK}(x) = \frac{1}{h} \int f(\tilde{x})K\left(\frac{\tilde{x} - x}{h}\right) d\tilde{x} = -\frac{1}{h^2} \int F(\tilde{x})K'\left(\frac{\tilde{x} - x}{h}\right) d\tilde{x}. \quad (13)$$

Заметим что для ядерной оценки функции плотности

$$\mathbb{E}[\widehat{f(x)}] = f_{hK}(x).$$

В этих обозначениях мы видим, что если считать, что ядерная оценка оценивает обобщенную функцию плотности, то разность $f_{hK}(x) - f(x)$ представляет собой (обобщенное) смещение этой оценки. Для ядра порядка $l + 1$ и $\psi \in D$ смещение выражается как

$$(f_{hK}(x), \psi) - (f(x), \psi) = (-1)^l \int F(\tilde{x}) \frac{h^l}{l!} \frac{\partial^{l+1}\psi}{\partial x^{l+1}}(\tilde{x})d\tilde{x} \int K(w)w^l dw + R(h) = O(h^l).$$

Таким образом, можно получить скорость сходимости обобщенного смещения. В Zinde-Walsh (2008) получено полное описание предельного распределения для оценки обобщенной функции плотности в форме обобщенного нормального процесса, для которого ковариационный функционал C для $\psi_1, \psi_2 \in D$ имеет вид

$$(C, (\psi_1, \psi_2)) = \int \psi_1(x)\psi_2(x)f(x)dx \int K(w)^2 dw = E(\psi_1(x)\psi_2(x)) \int K(w)^2 dw.$$

В Zinde-Walsh (2008) получены также результаты для широко используемой оценки условного ожидания без предположения о существовании функции плотности. Подобный результат в частном случае фрактального распределения был также получен в Lu (1999).

Допустим, что для модели

$$y_i = m(x_i) + u_i$$

используется непараметрическая оценка Надарая–Уотсона:

$$\widehat{m}(x) = \frac{\sum_{j=1}^n y_j K\left(\frac{x_j - x}{h}\right)}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{x_j - x}{h}\right)} = \frac{\frac{1}{nh^k} \sum_{j=1}^n y_j K\left(\frac{x_j - x}{h}\right)}{\widehat{f}(x)}.$$

При довольно широких предположениях и без ограничений на распределение доказано, что

$$(nh^k)^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(x) \left(\widehat{m}(x) - m(x) \right)$$

сходится к обобщенному нормальному процессу с ковариационным функционалом

$$(C_x, (\psi_1, \psi_2)) = \mathbb{E} [\psi_1(x)\psi_2(x)\sigma^2(x)] \int K(w)^2 dw, \tag{14}$$

где $\sigma^2(x)$ – дисперсия.

Этот результат может быть использован для проверки гипотез. При дополнительных условиях (достаточно общих) получены результаты относительно сходимости и самой оценки $\widehat{m}(x)$; эти результаты показывают, что для оценивания условного ожидания сходимость уско-ряется в точках сингулярности:

$$(nh^{k+2\eta})^{\frac{1}{2}} \left(\widehat{m}(x) - m(x) \right) \approx O_p(1),$$

где $\eta > 0$.

4.2 Как проверить свойства распределения: существование и гладкость плотности или сингулярность?

Как правило, проверка гипотез относительно сингулярности применяется для определения отдельных точек разрыва или негладкости функции. Müller (1992) предложил метод для определения точек разрыва в функции условного ожидания (и ее производных); этот метод базируется на использовании разности статистик, построенных с помощью несимметричных ядер. Подобный метод использован в Müller & Wang (1994) для определения точки разрыва в функции риска.

Frigyesi & Hössjer (1998) предложили общий метод для различения класса сингулярных распределений (которые, наряду с разрывами функции распределения, могут включать и более сложные, например фрактальные, сингулярности) от некоторого подкласса абсолютно гладких распределений. Их статистика основывается на функционале от ядерной оценки функции плотности; статистика ограничена в подклассе и расходится к бесконечности для сингулярных распределений. Проблема в том, что поведение этой статистики для представляющих интерес классов распределений изучено мало, ее значения могут быть очень велики даже в больших выборках (например, для χ^2), так что их трудно отличить от сингулярных.

Вообще задача проверки гипотезы о том, принадлежит ли распределение классу сингулярных или абсолютно непрерывных, неразрешима, как показано в Donoho (1988) и Lalley & Nobel (2003). Возможно только отличать друг от друга некоторые подклассы, и работа Frigyesi & Hössjer (1998) – шаг в этом направлении.

Результаты в Zinde-Walsh (2008) указывают на возможность построения более удобного функционала, чем у Frigyesi & Hössjer (1998) для построения статистики для проверки гипотез о степени гладкости. Такая статистика (Zinde-Walsh & Galbraith, 2007)

$$z = \frac{(nh)^{\frac{1}{2}} \left((\widehat{f(x)}, \psi(x)) - \mathbb{E}[\psi] \right)}{\left(\mathbb{E}[\psi^2] \int K(w)^2 dw \right)^{\frac{1}{2}}}$$

со специально подобранными функциями ψ (построенными на основе самого распределения) базируется на обобщенном смещении ядерной оценки, в то же время подобно статистике Frigyesi & Hössjer (1998) она построена так, что расходится к бесконечности для сингулярных распределений. Преимущество заключается в том, что известно асимптотическое распределение этой статистики в классе распределений с гладкой функцией плотности:

$$z \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

В подклассах распределений с сингулярностью можно указать скорость расхождения статистики, которая определяется расхождением функционала смещения обобщенной ядерной оценки.

Вычисление z требует численной оценки интегралов; знаменатель может быть определен из асимптотической формулы или через бутстрап дисперсии оценки. Поскольку асимптотическое распределение z в классе, где функция плотности гладкая, пивотально, к самой статистике можно применить параметрический бутстрап.

Предварительные результаты Монте-Карло показывают, что для равномерного, нормального и сингулярного распределений, рассмотренных в Frigyesi & Hössjer (1998) (равномерные веса на 100 равноотстоящих точках в $[0,1]$), получаются результаты, согласующиеся с теоретическими; кроме того, эта статистика легче идентифицирует свойства распределений (такие, как сингулярность), чем статистика Frigyesi & Hössjer (1998).

Список литературы

- Гельфанд, И.М. & Г.Е. Шиллов (1958). *Обобщенные функции*. Том 1: Обобщенные функции и действия над ними. Том 2: Пространства основных и обобщенных функций. Москва: Физматгиз.
- Гельфанд, И.М. & Н.Я. Виленкин (1961). *Обобщенные функции*. Том 4: Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Москва: Физматгиз.
- Соболев, С.Л. (1974). *Введение в теорию кубатурных формул*. Москва: Наука.
- Donoho, D.L. (1988). One-sided inference about functionals of a density. *Annals of Statistics* 16, 1390–1420.
- Fan, Y. & A. Ullah (1999). Asymptotic normality of a combined regression estimator. *Journal of Multivariate Analysis* 71, 191–240.
- Frigyesi, A. & O. Hössjer (1998). A Test for Singularity. *Statistics and Probability Letters* 40, 215–226.
- Gel'fand, I.M. & G.E. Shilov (1964). *Generalized Functions*, vol. 1,2. Academic Press.
- Gel'fand, I.M. & N.Y. Vilenkin (1964). *Generalized Functions*, vol. 4. Academic Press.
- Green, D.A. & W.C. Riddell (1997). Qualifying for unemployment insurance: An empirical analysis. *Economic Journal* 107, 67–84.
- Guggenberger, P. & Y. Sun (2006). Bias-reduced log-periodogram and Whittle estimation of the long-memory parameter without variance inflation. *Econometric Theory* 22, 863–912.
- Horowitz, J.L. (1992). A smoothed maximum score estimator for the binary response model. *Econometrica* 60, 505–531.
- Juditsky A. & A. Nemirovski (2000). Functional aggregation for nonparametric regression. *Annals of Statistics* 28, 681–712.

- Kotlyarova, Y. & V. Zinde-Walsh (2004). Improving the efficiency of the smoothed maximum score estimator. Working paper, McGill University.
- Kotlyarova, Y. & V. Zinde-Walsh (2006). Non- and semi-parametric estimation in models with unknown smoothness. *Economics Letters* 93, 379–386.
- Kotlyarova, Y. & V. Zinde-Walsh (2007). Robust kernel estimator for densities of unknown smoothness. *Journal of Nonparametric Statistics* 19, 89–101.
- Lalley, S.P. & A. Nobel (2003). Indistinguishability of absolutely continuous and singular distributions. *Statistics and Probability Letters* 62, 145–154.
- Li, Q. & J.S. Racine (2007). *Nonparametric Econometrics: Theory and Practice*. Princeton University Press.
- Lu, Z.-Q. (1999). Nonparametric regression with singular design. *Journal of Multivariate Analysis* 70, 177–201.
- Manski, C.F. (1975). Maximum score estimation of the stochastic utility model of choice. *Journal of Econometrics* 3, 205–228.
- Müller & H.-G. (1992). Change-points in nonparametric regression analysis. *Annals of Statistics* 20, 737–761.
- Müller, H.-G. & J.-L. Wang (1994). Change-point models for hazard functions. In *Change-point problems*, IMS Lecture Notes 23, 224–241.
- Pagan, A. & A. Ullah (1999). *Nonparametric Econometrics*. Cambridge University Press.
- Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density and mode. *Annals of Mathematical Statistics* 33, 1065–1076.
- Schafgans, M. & V. Zinde-Walsh (2007). Robust Average derivative estimation. Working paper, McGill University & CIREQ.
- Sobolev, S. (1992). *Cubature formulas and modern analysis*. Gordon and Breach Science Publishers.
- Yang, Y. (2000). Combining different procedures for adaptive regression, *Journal of Multivariate analysis* 74, 135–161.
- Yang, Y. (2000). Mixing strategies for density estimation. *Annals of Statistics* 28, 75–87.
- Zinde-Walsh, V. & J.W. Galbraith (2007). When is a distribution smooth enough for nonparametric estimation? Manuscript, McGill University.

Consequences of lack of smoothness in nonparametric estimation

Victoria Zinde-Walsh

McGill University, Montreal, Canada

Nonparametric estimation is widely used in statistics and econometrics with many asymptotic results relying on smoothness of the underlying distribution, however, there are cases where such assumptions may not hold in practice. Lack of smoothness may have undesirable consequences such as an incorrect choice of window width, large estimation biases and incorrect inference. Optimal combinations of estimators based on different kernel/bandwidth can achieve automatically the best unknown rate of convergence. The combined estimator was successfully applied in density estimation, estimation of average derivatives and for smoothed maximum score in a binary choice model. In the extreme case when density does not exist the estimator “estimates” a non-existent function; nevertheless its limit process can be described in terms of generalized (in terms of generalized functions) Gaussian processes. Inference about existence of density and about its smoothness is not yet well developed; some preliminary results are discussed.

Советы изучающим эконометрику

Оформление эконометрических отчетов*

Станислав Анатольев[†]

Российская экономическая школа, Москва, Россия

В эссе обсуждаются структура эконометрического отчета, формат представления таблиц и диаграмм, а также точность численных результатов.

1 Структура и формат отчета

Под «отчетами» в настоящем эссе подразумеваются статьи, курсовые проекты и заявки на гранты, в которых существенная часть посвящена эмпирическому исследованию. Мы будем в основном говорить об эмпирической статье.

Обязательные компоненты отчета – название, аннотация, введение, заключение, библиография. Важно, чтобы аннотация и заключение не повторяли друг друга, и аннотация была не просто сжатым вариантом введения. По сути, каждый из этих разделов стоит писать отдельно друг от друга, не «подглядывая». Хорошее заключение – это не столько подведение итогов статьи (хотя и это тоже), сколько описание ее недостатков и связи с возможными будущими исследованиями.

Тело статьи обычно делится на 3–5 разделов, например: «Экономическая модель», «Данные», «Эконометрическая модель», «Эмпирические результаты». Если есть необходимость доказать какое-то математическое утверждение, и доказательство занимает более трети страницы, его следует поместить в приложение. Так же стоит поступить с любым второстепенным (особенно техническим) материалом, например, описанием не широко известного теста, если оно слишком объемно. Приложение лучше тоже разбить на разделы, если материал неоднороден. Таблицы и рисунки желательно располагать внутри текста вблизи мест их первого упоминания. В конец отчета их стоит помещать разве что в подаваемой в журнал версии.

Очень важно выдержать отчет в едином стиле. Например, формулы, если они размещаются посередине страницы и нумеруются справа, должны размещаться посередине и нумероваться справа везде; отступы также должны быть одинаковыми. Список литературы (библиография) также должен следовать единому стилю (приемлемых стилей довольно много; за образец можно взять любой экономический журнал, имеющий хорошую репутацию). Каждая из библиографических позиций должна быть достаточно детализирована (особенно это касается неопубликованных статей). Названия журналов сокращать не принято.

В курсовом проекте некоторые из разделов могут, естественно, быть опущены. Что касается заявки на грант, соискателя может ожидать неприятный сюрприз: заявка должна быть почти финальным отчетом, включая «предварительные» результаты! В любом случае, профессиональное оформление заявки может сыграть существенную позитивную роль при решении о предоставлении гранта: эксперты тоже люди, и встречают по «одежке». Почему-то соискатели часто пренебрегают этим очевидным фактом.

Если у автора отчета есть выбор, каким программным продуктом пользоваться, то выбор систем \TeX и \LaTeX и соответствующей оболочки Scientific Workplace представляется оптимальным. Отчеты при этом выглядят гораздо профессиональнее, чем это достижимо при использовании Microsoft Office.

*Цитировать как: Анатольев, Станислав (2008) «Оформление эконометрических отчетов», Квантиль, №4, стр. 71–78. Citation: Anatolyev, Stanislav (2008) “Making econometric reports,” Quantile, No.4, pp. 71–78. Автор благодарит Данилу Делия за замеченные недочеты.

[†]Адрес: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, 47, офис 1721(3). Электронная почта: sanatoly@nes.ru

2 Таблицы

Любая таблица с результатами должна сопровождаться названием (над или под таблицей) и аннотацией (обычно под таблицей) с объяснением значений практически всех нечисленных символов, встречающихся в таблице: переменных, коэффициентов, идентификаторов тестовых статистик. Детализация подобных объяснений зависит от ситуации и вкуса; возможно и краткое упоминание со ссылками на подробности в тексте отчета, а возможно и подробное описание, вплоть до распределений тестовых статистик. Заметим, что если используются не самые распространенные тесты (например, тест Брауна–Форсайта), в тексте отчета необходимо подробно описать построение статистики и стоящую за ней идею. В то же время, широко распространенные тесты (например, тест Льюнга–Бокса) необязательно подробно комментировать, хотя тоже стоит пояснить в аннотациях таблиц.

Таблица 1 иллюстрирует минимальный вариант аннотации в таблице, а таблица 2 – случай, близкий к максимальному.

Таблица 1. Results of fitting exponential ACD models to Linex-transformed GNP growth

Model	ACD ₁	ACD ₂	LACD ₁	LACD ₂
ω	0.903 (0.147)	0.843 (0.186)	0.308 (0.048)	0.071 (0.103)
ϕ_1	0.333 (0.092)		0.340 (0.088)	
ϕ_2	0.150 (0.069)		0.130 (0.082)	
χ_1		0.552 (0.170)		0.290 (0.083)
χ_2		0.340 (0.102)		0.184 (0.052)
LogL	-1.5450	-1.5460	-1.5450	-1.5462
Q(3)	2.76	1.70	0.44	3.13
Disp	-4.64	-4.63	-4.64	-4.63
Pear	442.4	448.5	432.9	444.3

Notes: Shown are point estimates with robust standard errors in parentheses of estimating various ACD models. “LogL” is average loglikelihood, “Q(3)” is Ljung–Box statistic of order 3, “Disp” is excess dispersion test, “Pear” is Pearson test statistic with 20 bins. See the text for details.

Таблица 2. Estimation results from the volatility model

	ω_r	β_r	γ_r	ρ_r	ζ	<i>ED</i>	<i>PT</i>
coefficient	-0.504	0.808	0.035	-0.173	1.275	-0.08	19.96
standard error	0.244	0.074	0.013	0.059	0.054		
t-statistic	-2.07	10.9	2.69	-2.87	5.07		

Notes: Shown are estimates together with robust standard errors and *t*-statistics of the coefficients in the MEM equation $|r_t| = \psi_t \eta_t$, where ψ_t follows (4), and η_t is distributed as normalized Weibull with shape parameter ζ . The *t*-statistic in the column for ζ is computed for the restriction $\zeta = 1$. The excess dispersion statistic *ED* is distributed as standard normal under the null of Weibull distribution. The Pearson test statistic *PT* compares the discretized empirical and Weibull distributions using 20 cells; its null distribution is bounded between χ_{18}^2 and χ_{19}^2 .

В таблицах результатов точечные оценки необходимо сопровождать в первую очередь стандартными ошибками. Имея подобную информацию, легко в уме прикинуть приближенные доверительные интервалы, значимость параметров и т.д. Если же оценки сопровождаются *t*-статистиками, обратное преобразование с целью получить стандартные ошибки более трудоемко и менее прозрачно. Кроме того, если выдаются *t*-статистики, то наиболее разумным

выбором может оказаться t-статистика, соответствующая не значимости параметра, а значимости разницы между ним и каким-то характерным ненулевым значением. Например, в таблице 2 для параметра ζ Вэйбулловского распределения дана t-статистика, соответствующая гипотезе $\zeta = 1$, при которой распределение редуцируется в экспоненциальное.

В случае тестовых статистик, распределенных при нулевой гипотезе как χ^2 , наряду со значениями статистик уместно указывать вероятностные значения. Отметим, что общепринято (по желанию) приписывать статистически значимому коэффициенту (конечно, в тех случаях, когда значимость несет смысл) от одной до трех звездочек (а именно, * – на 10%-ном, ** – на 5%-ном и *** – на 1%-ном уровнях, и ни в коем случае не наоборот!).

Наряду с таблицами результатов, широко распространены таблицы, описывающие свойства используемых данных. Ни в коем случае не годится включать необработанные таблицы или диаграммы, выдаваемые в статистических пакетах (как, например, Рис. 1). Вот, например, неплохой вариант таблицы с обработанными показателями:

Таблица 3. Summary statistics of spreads

Window	Min	Max	Mean	Median	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis
Gazprom ^a							
1 minute	0.01	2.95	0.37	0.26	0.36	2.75	14.2
2 minute	0.02	3.51	0.53	0.37	0.45	2.51	12.2
3 minute	0.06	3.51	0.61	0.47	0.48	2.34	11.0
Euro / Japanese Yen ^b							
	0.02	0.09	0.04	0.04	0.0022	8.67	266

^aThe spreads cover September 1, 2006 through December 19, 2006.

^bThe spreads cover September 1, 2006 through December 29, 2006.

3 Диаграммы

Так же, как и в случае таблиц, лучше не показывать графики, являющиеся прямым результатом работы статистических пакетов. Например, Рис. 1 скопирован из окна программы *Econometric Views*. График малоинформативен, косолап и некрасив. В переработанном виде эта же диаграмма может выглядеть как красавица на Рис. 2.

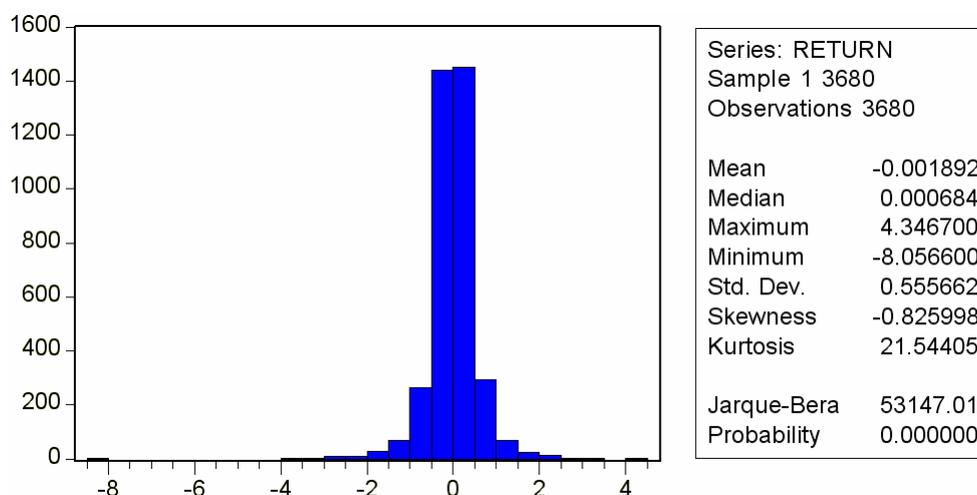


Рис. 1: Плохой вариант гистограммы

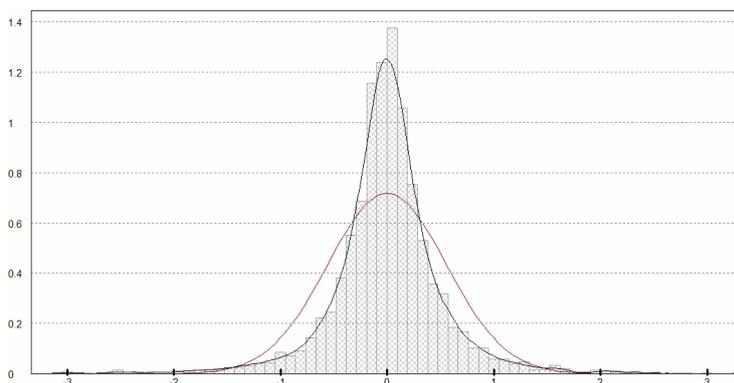


Рис. 2: Отличный вариант гистограммы

Отображать исходные данные на графике нужно всегда. Один из удачных вариантов изображен на Рис. 3. Рисунок информативен и прост до изящества (отметим также наличие названия и наименований осей). На Рис. 4 показан вариант, построенный в программе *Econometric Views*. Вариант в принципе приемлемый, но названия переменных надо было указать в человеческом виде. А вот на Рис. 5 показан абсолютно неприемлемый вариант оформления графика. Пусть читатель сам найдет хотя бы пять недостатков. Одним из них может считаться серый фон, на котором изображен собственно график. К сожалению, он задается по умолчанию в программе *Excel* (точнее, в более ранних ее версиях), но это не является основанием включать его в отчет в подобном виде. В еще более худшем варианте фон может быть черным (по умолчанию в программе *GAUSS*), а собственно график – одного из светлых цветов. Финансовые данные следует представлять и в уровнях (ценах), и в приращениях (доходностях), как, например, на Рис. 6.

Какие недостатки у диаграммы на Рис. 7? Главная неприятность здесь – расположение и формат легенды: почему-то она задевает собственно график, а цвета внутри представлены маркерами нечетко (это последствие того, что линии нарисованы не как линии, а как совокупность маркеров). Менее очевидный недостаток этой диаграммы в том, что при печати на черно-белом принтере четыре из кривых (а кто-то скажет, что и все пять) печатаются одним и тем же черным цветом (кстати, у Рис. 4 тот же недостаток). Включая цветные графики, нужно учитывать возможность черно-белого «использования» отчета.

При создании диаграмм следует проявлять фантазию. Можно и на одном-единственном графике отобразить массу информации, как, например, на Рис. 8 и 9 (наименования осей подавлены). Кстати, при распечатывании Рис. 9 на черно-белом принтере все три цвета вполне различимы.

4 Численная точность

Из предыдущих разделов уже ясно, что в отчете следует показывать обработанные численные результаты, а не те, что выплюнет компьютер по ему одному ведомым критериям. По наблюдениям, критерий один – как можно больше цифр «на всякий случай». Понятно, что хороший отчет не принадлежит к категории «всякого случая».

Точность чисел, выдаваемых в разных частях отчета, в основном в таблицах, диктуется двумя факторами – назначением этих чисел и правилами приближенных вычислений. Чаще всего эти факторы тесно переплетаются между собой, и необходимо руководствоваться обоими критериями. Некоторые соображения ниже не идеальны, но достаточно полезны, чтобы по крайней мере избежать абсурдностей.

Когда указывается значение t-статистики вроде 5,7117253, мы как раз имеем дело с та-

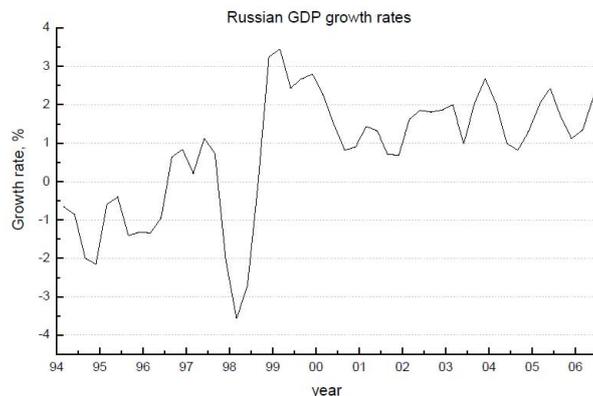


Рис. 3: Хороший вариант представления данных

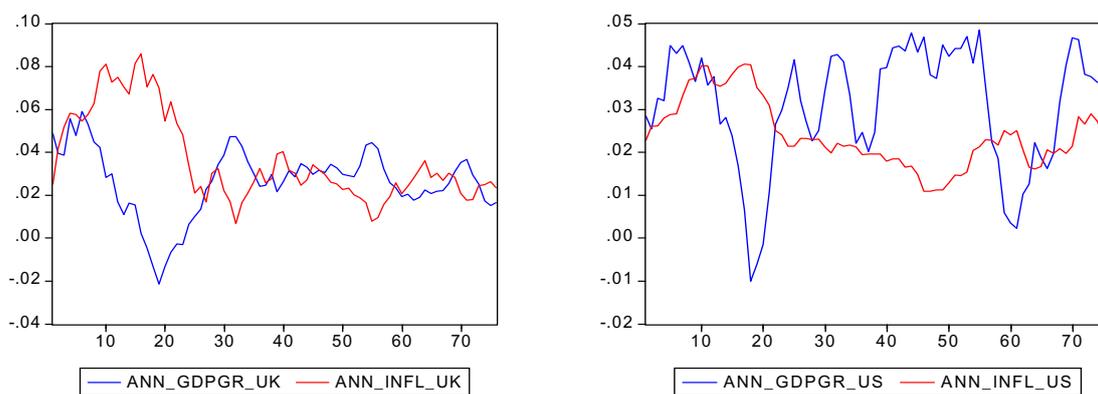


Рис. 4: Не очень хороший вариант представления данных

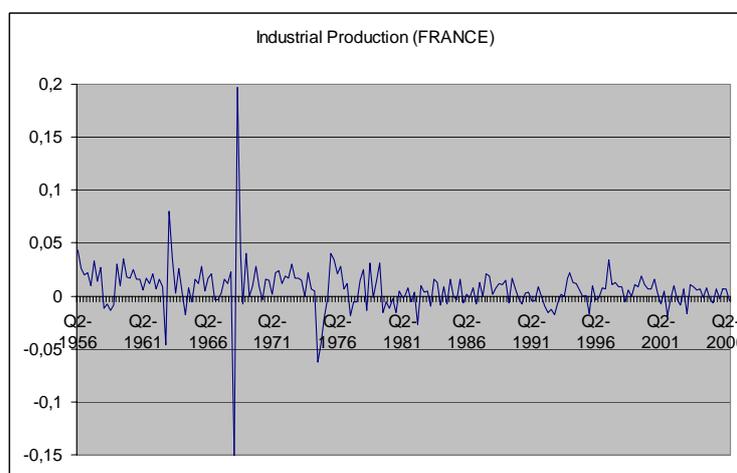


Рис. 5: Неприемлемый вариант представления данных

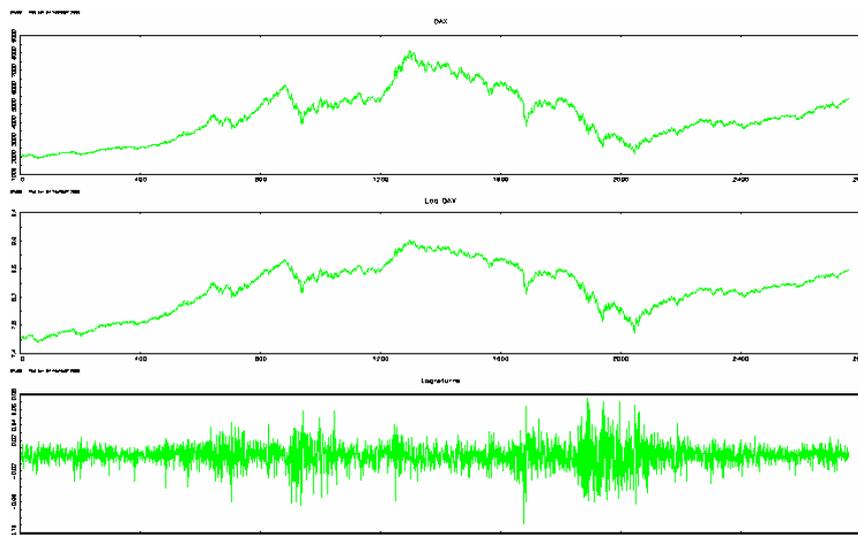


Рис. 6: Графическое представление финансовых данных

кой абсурдностью. Во-первых, назначение t -статистики – в ее сравнении с критическими значениями типа 1,96, обычно используемыми с точностью до двух знаков после запятой. В этом свете в данном примере все цифры после запятой являются несущественными, ибо значимость на любых общепринятых уровнях очевидна. Во-вторых, t -статистика есть определенная функция от данных, которые чаще всего являются приближенными. Если участвующие данные измерялись с точностью до четырех значащих цифр,¹ абсурдно сохранять и в результате более четырех значащих цифр. С учетом обоих факторов значение, указанное выше, разумно показать как 5,71.

Положим, при прогоне авторегрессии на данных по росту ВВП, где сам ВВП принимает значения типа 391,8, компьютер выдал значение 0,82768729 как точечную оценку авторегрессионного параметра и значение 0,49786721 как ее стандартную ошибку. Разумно тогда выдать значение 0,828 или даже 0,83 в качестве точечной оценки и значение 0,498 или, соответственно, 0,50, в качестве стандартной ошибки.² Почему? Формула для оценки авторегрессионного коэффициента представляет из себя дробь, в числителе и знаменателе которой усредняются (после взятия приращений) числа с двумя цифрами до и одной цифрой после запятой, в среднем дающие три значащие цифры, и операция деления возвращает результат с той же точностью в терминах количества значащих цифр. Количество знаков после запятой у стандартной ошибки, в свою очередь, должно быть равно таковому у точечной оценки, ибо стандартная ошибка используется вместе с точечной оценкой для расчета доверительных интервалов в операциях типа сложение и вычитание.³ По этой логике, если точечная оценка показывается как 4,321, то стандартная ошибка может показываться как 0,305, но не 0,3052. Для подсчета t -статистики используются числа с максимальной точностью, а уже

¹Значащие цифры – все цифры числа, начиная с первой слева, отличной от нуля, до последней, за правильность которой можно ручаться. Например, если измерение произведено с точностью до 0,0001 и дало результат 0,0320, то значащие цифры будут 3, 2 и 0. («Большая Советская Энциклопедия»). Еще пример: в 4,736012 все цифры и 0 – значащие, но в 0,00624 значащие только 6, 2 и 4, а первые три нуля незначащие, ибо они служат вспомогательной цели – определению положения остальных цифр. В числах 813000 и $8,13 \times 10^6$ в первой записи все 7 цифр – значащие, а во второй значащими являются только 8, 1 и 3.

²Заметим, что нуль после пятерки нельзя опускать, ибо это *значащий* нуль.

³Туристы в Чикагском Музее Естествознания поражаются костям динозавра. Один из них спрашивает охранника: «Вы можете сообщить мне, какого возраста кости динозавра?» Ответ охранника: «Им три миллиона четыре года, и шесть месяцев». – «О! Это ужасно точное число! И откуда же Вы знаете их возраст так точно?» Ответ охранника: «Этим костям динозавра было три миллиона лет, когда я начал работать здесь, и это было четыре с половиной года назад».

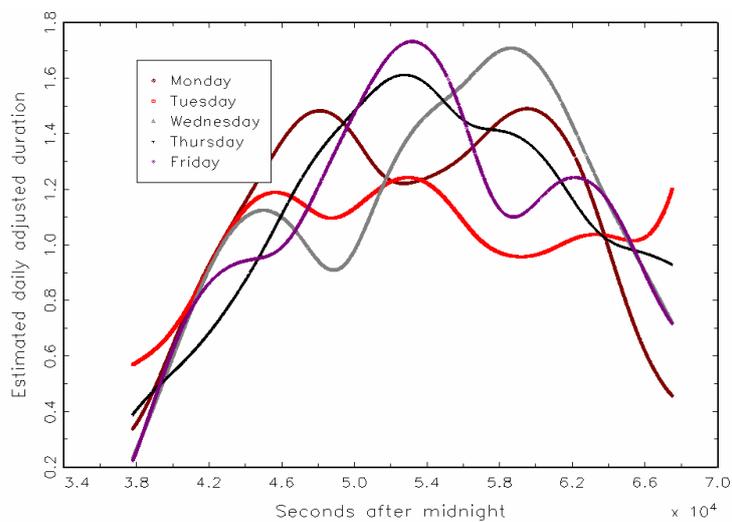


Рис. 7: Диаграмма с недостатками

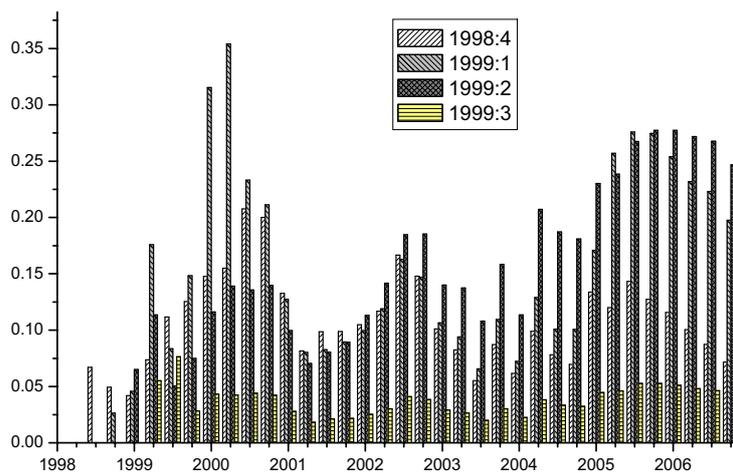


Рис. 8: Замечательная диаграмма

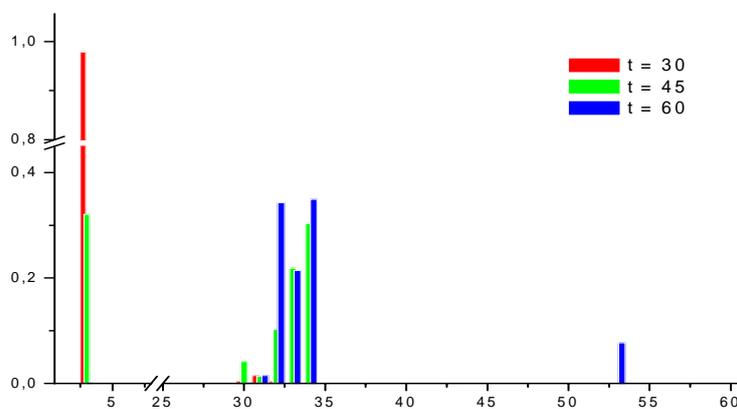


Рис. 9: Еще одна замечательная диаграмма

затем результат округляется до необходимого количества значащих цифр.

Аналогичным образом, не следует выдавать статистику Вальда со значением 351,473, ибо речь, скорей всего, идет о сравнении с критическими значениями χ^2 -распределения. Вероятностные значения должны даваться с двумя-тремя, максимум четырьмя цифрами после запятой (ибо характерными являются значения 0,010, 0,050 и 0,100), например, 0,18, 0,561 или 0,0034. Вероятностное значение 0,000 несет не меньше смысла, чем, например, $1,24 \times 10^{-6}$, но выглядит более адекватно. К слову, запись $1,24 \times 10^{-6}$ радует глаз гораздо больше, чем $1,24e-006$.

Исключением из общего правила «не показывать слишком много цифр в числах» является следующее: если сравниваются некоторые статистики (такие как значения функции правдоподобия или информационного критерия) в разных моделях, и значения статистик различаются незначительно, следует оставлять столько цифр, сколько необходимо для демонстрации различия этих значений друг от друга (см., например, строку LogL таблицы 1).

В англоязычном тексте десятичным разделителем является точка, в русскоязычном – запятая.

Дополнительная литература

Существует несколько пособий и методологических статей, подробно описывающих правила хорошего тона при оформлении работ, а также в целом процесс исследований и остальной профессиональной деятельности экономиста. Особенно полезным источником нам представляется монография Thomson (2001, 2003). Хороши также советы, данные в Cochrane (2005).

Choi, K. (2002). How to publish in top journals. Находится на <http://www.roie.org/how.htm>.

Cochrane, J. (2005). Writing tips for PhD students. Working paper, University of Chicago. Можно скачать с http://faculty.chicagobooth.edu/john.cochrane/research/Papers/phd_paper_writing.pdf.

Creedy, J. (2005). From manuscript to publication: A brief guide for economists. Working paper, University of Melbourne. Можно скачать с <http://www.economics.unimelb.edu.au/downloads/wpapers-05/934.pdf>.

Hamermesh, D. (1992). The young economist's guide to professional etiquette. *Journal of Economic Perspectives* 6, 169–179.

Thomson, W. (2001, 2003). *A Guide for the Young Economist*. Cambridge: MIT Press.

Varian, H.R. (1997). How to build an economic model in your spare time. *American Economist* 41, 3–11. Можно скачать с <http://www.sims.berkeley.edu/~hal/Papers/how.pdf>.

Making econometric reports

Stanislav Anatolyev

New Economic School, Moscow, Russia

This essay discusses the structure of an econometric report, format of tables and diagrams, as well as precision of numerical results.

История эконометрики

Нелинейная динамика и теория хаоса в экономической науке: историческая ретроспектива^{*}

Артем Прохоров[†]

Университет Конкордия, Монреаль, Канада

В данном историко-экономическом эссе прослеживается эволюция идей о нелинейности, стохастичности и динамичности в экономической науке, которая связывает линейный и статический детерминизм XVIII–XIX веков с нелинейными механистическими системами со случайным компонентом и детерминистическими и стохастическими динамическими системами XX-го века, в частности, с теорией хаоса. Особое внимание уделяется моделям второй половины XX-го века; тем не менее, эссе не содержит ни одной сложной формулы.

«Мы уже знаем физические законы, лежащие в основе всего, с чем мы встречаемся в ежедневном обиходе... Показателем того, какой длинный путь нам удалось пройти, можно считать тот факт, что сейчас нам приходится использовать мощнейшие машины и тратить огромные средства на осуществление экспериментов, результаты которых мы *не* можем предсказать».

Стивен Хокинг, цитата из Gleick (1991)

1 Введение

Важность динамических систем (как детерминистических, так и стохастических) в истории науки предопределяется их связью с вопросом о предсказуемости природных и социальных процессов. В свою очередь, вопрос о том, предсказуемы ли происходящие вокруг нас явления, находится в центре дискуссии о свободе выбора и воле человека, об исходном и конечном состоянии социально-экономических и естественных систем и других философских вопросов. Как это ни парадоксально, наблюдаемое «поведение» некоторых детерминистических динамических систем неотличимо от поведения систем, движимых исключительно случаем. Ни то, ни другое мы, как и раньше, не в состоянии предсказывать. Нежелание мириться со столь парадоксальным и ироническим положением вещей, по всей вероятности, и заставляет ученых работать над динамическими моделями. В ходе этой работы удалось сделать множество значимых открытий. О них и идет речь в данном эссе.

В рамках экономической науки противостояние детерминистических и стохастических взглядов вылилось в обширную критику классических экономических моделей, унаследованных господствующей современной экономической парадигмой (мейнстримом). Многочисленные варианты этой критики касались наблюдаемых в действительности явлений, находящихся в

^{*}Цитировать как: Прохоров, Артем (2008) «Нелинейная динамика и теория хаоса в экономической науке: историческая ретроспектива», Квантиль, №4, стр. 79–92. Citation: Prokhorov, Artem (2008) “Nonlinear dynamics and chaos theory in economics: a historical perspective,” *Quantile*, No.4, pp. 79–92. Автор признателен профессору Джеффри Бидлу (Университет штата Мичиган, США) за его комментарии в ходе работы над эссе.

[†]Адрес: 1455 de Maisonneuve Blvd West, Montréal, Québec, H3G 1M8, Canada. Электронная почта: Artem.Prokhorov@concordia.ca

противоречия с выводами классической экономической теории, например, постоянных беспорядочных колебаний экономических показателей и отсутствия всяких признаков сходимости экономических систем к стабильному равновесию, предсказанному классиками. Рыночная экономика представляется многим скорее как динамически нестабильная система, а не детерминистическая система, в которой редкие эпизоды нестабильности являются следствием внешних шоков. Как станет ясно из дальнейшего изложения, нелинейность динамических экономических систем могла стать связующим звеном между детерминистическими классическими моделями и наблюдаемыми характеристиками экономических процессов, а хаотическая динамика могла бы служить одним из возможных объяснений наблюдаемых противоречий.

Теория хаоса занимает особое место в каждой области знаний, где мы имеем дело с динамикой. В таких науках, как физика, биология, метеорология, медицина и химия, история теории хаоса – это преимущественно история успешного объяснения какого-то важного явления, например, электрических и механических колебаний в физике, роста численности вида в биологии, схемы образования воздушных и водных потоков в метеорологии, особенностей функционирования сердца и мозга в медицине, особенностей протекания реакций в химии. В экономике, однако, история исследований в области хаотической динамики не настолько успешна. Так и не удалось с достоверностью установить, имеет ли место хаотическая динамика низкой размерности в экономических процессах, и многие из старинных противоречий между предсказанными экономическим мейнстримом и наблюдаемыми в действительности явлениями все еще не разрешены. Тем не менее, эти исследования привели к возникновению новых эконометрических методов. Одно это делает их достойными изучения.

Цель настоящего эссе – предоставить обзор динамических методов, делая акцент на интуиции и преимуществах, которые свойственны исследованиям в этой области, а не на технических деталях. Во второй части рассматриваются механистические представления о мире, унаследованные экономическим мейнстримом от науки XVIII-го века, в частности, от классической экономической науки. В третьей части обозначены основные этапы в истории экономических учений, которые в конечном итоге привели к распространению стохастических и нелинейных моделей. Четвертый раздел целиком посвящен теории хаоса. В заключении нашего ретроспективного повествования обсуждаются перспективы динамического моделирования в экономике.

2 Динамические модели в экономике и классическое механистическое мировосприятие

Возникновение экономики как науки часто связывают с интеллектуальной средой второй половины XVIII-го и начала XIX-го века. Философия Просвещения, которая доминировала в передовых странах мира в то время, заимствовала многое из эпохи Возрождения. Установление гуманистических ценностей и возрождение классического интереса к познанию окружающего мира после долгого периода культурной стагнации на протяжении Средних Веков, сопровождаемое открытием и освоением новых континентов, значительными успехами в естественных науках, закатом феодализма и ростом торговли, – эти вехи эпохи Возрождения предопределили характер эпохи Просвещения.

В центре философии Просвещения была неограниченная сила человеческого разума, с помощью которой считалось возможным понять все законы Вселенной и даже улучшить текущее состояние дел. Знание и свобода стали основными составляющими счастья для человека. Именно поэтому мы наблюдаем тесную связь между философией Просвещения и естественными науками, призванными помочь человеку обрести счастье. Неудивительно, что Ньютон, Лейбниц и другие ученые, внесшие в то время крупный вклад в развитие естественных наук, были одновременно влиятельными философами.

Физика – идеал науки эпохи Просвещения – имела, пожалуй, наиболее сильное воздействие на общество и ученых. Эта наука могла с точностью предсказать результат эксперимента, осуществленного в четко определенной среде. Несколько физических констант лежат в основе базовых законов движения систем и предопределяют предсказуемость эксперимента. Считалось, что вся Вселенная, все и вся, управляется «естественными законами», то есть набором причинно-следственных закономерностей, отражающих абсолютную предсказуемость всех явлений. Известно, что в 1776 г. Лаплас писал:

«Текущее состояние природной системы, по-видимому, является следствием того, в каком состоянии она пребывала в предыдущий момент, и если бы ... были известны все закономерности, связывающие все объекты во Вселенной, то можно было бы знать их относительное местоположение, их перемещения и общее воздействие всех этих объектов друг на друга в каждый момент времени, как в прошлом, так и в будущем.

Физическая астрономия, область знаний, которая вызывает больше всего уважения, предоставляет нам возможность ... видеть, как это происходит. Простота закона, по которому вращаются небесные тела, ... позволяет проследить аналитически их движение до любой точки; ... достаточно знать их местоположение и скорость в отдельный момент времени. Это становится возможным благодаря инструментам, доступным человеку, и небольшому числу закономерностей, задействованных в соответствующих вычислениях. Из-за незнания причин, вызывающих явления, из-за их сложности наряду с неточностью анализа мы не можем достичь такого же уровня предсказуемости в отношении подавляющего большинства явлений. Поэтому существуют вещи, которые мы не можем утверждать с достоверностью, более или менее вероятные явления, и мы пытаемся компенсировать наше незнание тем, что оцениваем степень их вероятности. Таким образом, именно слабости человеческого разума мы обязаны одной из самых утонченных и оригинальных математических теорий – наукой случая, или теорией вероятности» (цитата из Crutchfield, Farmer, Packard & Shaw, 1986).

Это высказывание Лапласа характерно для научной среды конца XVIII – начала XIX века. В нем мир предстает абсолютно детерминистическим; стохастичность сама по себе отсутствует; неопределенность понимается как недостаток знания о детерминистических закономерностях сложной системы; свободная (точнее, непредопределенная) воля – миф. Интересно, что, не подозревая об этом, Лаплас выразил в этой цитате более чем двухвековой давности идеи, высказываемые в отношении теории хаоса во второй половине XX-го века.

Основополагающие работы Смита, Рикардо, Милля, Маршалла и других экономистов-классиков, без сомнения, ощутили на себе воздействие политических и социальных аспектов натурфилософии Просвещения. Поиск детерминистических «законов движения» экономической системы прослеживается в дебатах о «невидимой руке», о рациональности экономических субъектов, о конкурентных рынках и пр. Центральной для формирования экономики как науки была идея о том, что индивиды ведут себя в соответствии с некоторыми типичными схемами. Подобная схожесть экономики с естественными науками становилась особенно очевидной по мере того, как экономика становилась все более и более математизированной во второй половине XIX-го века. Основоположники математического подхода в экономической науке, такие как Вальрас, Парето, Курно, утверждали, что хотят устранить ошибки классических экономистов, переписав «естественные законы» в форме, соответствующей по уровню внутренней последовательности физическим законам. Многие из этих экономистов были по образованию физиками, инженерами и математиками.

Важно отметить, что механистический взгляд на мир не всегда был статическим. Приведенная выше цитата показывает, что динамическая зависимость текущего состояния системы от предыдущего уже была общепринятой. Теория социально-экономических формаций Маркса, к примеру, была, в сущности, динамической теорией. Однако динамичность систем была, как правило, завуалирована и принимала форму того, что сейчас называют сравнительной статикой.

По существу, классическое физическое мировоззрение тоже было линейным. К примеру, Lorenz (1989) утверждает, что взаимодействие между явлениями исследовалось классическими физиками как аддитивное, то есть физические явления изучались отдельно от среды, в которой они происходили, а сложные системы рассматривались как результат «линейного наложения» отдельных элементов.

В 1844 году, описывая «беспокоящие причины», не позволяющие экономической науке достичь уровня предсказательной способности, характерного для некоторых других наук, Милль утверждал в духе линейного детерминизма: «Нет закона, действующего в девяноста девяти случаях из ста, и исключения из него, имеющего место в одном случае из ста, а есть два закона, оба действуют во всех ста случаях и приводят к совместному результату посредством объединения своих действий» (Mill, 2000, стр. 114).

Линейный квази-динамический детерминистический подход особенно очевиден в анализе частичного равновесия Маршалла. В своих «Принципах» он сравнивает экономику с наукой о приливах и отливах, с одной стороны, и с законом гравитации, с другой. Он приходит к выводу, что экономическая наука не может достичь уровня предсказательной способности закона гравитации, потому что ей не свойственно знание комплексной природы взаимодействий, характерное науке о приливах и отливах:

«... хотя и существует множество видов воздействия, оказываемых на Юпитер и его спутники, но каждый из этих видов воздействия осуществляется строго определенным образом, который можно предсказать заранее, но никто не знает достаточно о погоде, чтобы предсказать ее воздействие... Законы экономики скорее сравнимы с законами приливов и отливов, а не с законами гравитации. Ведь действия человека столь многообразны и неточны, что даже самые достоверные прогнозы таких действий не могут не содержать неточностей и ошибок» (Marshall, 1949, стр. 18).

Чтобы преодолеть эту проблему, Маршалл изолирует отдельные элементы комплексной системы и рассматривает все другие элементы как экзогенные. Этот метод позволяет ему дать приемлемое объяснение взаимосвязи между эндогенными переменными, а также в отдельных случаях между эндогенными и экзогенными переменными, но в общем случае не возникает динамической картины, с помощью которой можно было бы представить всю систему целиком.

Lorenz (1989) утверждает, что сравнительная статика применима, только если динамический процесс сходится к новому равновесному состоянию после воздействия шока, и если не существует обратной связи от эндогенных переменных к экзогенным. Несмотря на это, в соответствии с Лоренцом современная экономическая наука делает акцент на линейных видах зависимости, как и в начале формализации экономики как науки. Без сомнения, признает Лоренц, экономический анализ был обогащен работами о существовании и стабильности равновесия в рамках теории общего равновесия, в частности, работами Эрроу и Дебре. Однако, на протяжении последней части XIX – первой части XX века экономический мейнстрим занимался лишь несколькими, наиболее «удобными» видами линейного динамического поведения, в частности затухающими или осциллирующими колебаниями, вызываемыми монотонным или осциллирующим схождением к стационарному равновесному состоянию (так называемому устойчивому узлу или фокусу) или стабильными осцилляциями (так называемой центральной динамикой).

В начале XX-го века стало ясно, что простые выводы линейных детерминистических квази-динамических систем не давали полной картины и не соответствовали свойствам растущего объема экономических временных рядов. Следуя традициям ранних институционалистов, Весли Митчелл писал в своем президентском обращении к Американской экономической ассоциации в 1924 году (Mitchell, 1925, стр.11): «... Статистический взгляд на вещи предполагает использование понятий разнородность, вероятность, аппроксимация ... Механистические рассуждения используют понятия подобия, постоянства, инвариантности законов. В

экономике такие понятия неприменимы для точного описания явлений. Поэтому нам следует довериться наблюдениям».

Mirowski (1989) предлагает живое описание чувства неудовлетворенности состоянием дел, царившего в начале века среди экономистов (особенно, так называемой «Колумбийской школы»).

Аналогичным образом, Day (1992) показывает, что если разместить экономические величины «на био-астрономической шкале времени», то микро- и макроэкономическим величинам и показателям роста будут характерны беспорядочные флуктуации, а общее экономическое развитие будет иметь экспоненциально-неустойчивый характер. Фактически отсутствуют доказательства классического тезиса о сходимости экономических процессов к стационарному состоянию или к упорядоченным периодическим циклам.

Еще более важным оказалось коренное изменение в научной среде, произошедшее в начале XX-го века, когда в рамках теории относительности и квантовой механики удалось показать применимость стохастических динамических концепций.

3 Нелинейная динамика в экономике

Наблюдаемым экономическим временным рядам не свойственна упорядоченность, предсказываемая линейными динамическими механистическими системами. В противоположность теории равновесия, показатели частоты и амплитуды экономических флуктуаций беспорядочны и не показывают ни четкой сходимости, ни устойчивых колебаний. Их предсказание с помощью детерминистических «естественных законов» оказалось невозможным. Такое состояние дел в экономике отражало общую проблему предсказуемости, характерную для всех наук на рубеже века, в частности, для физики. Обсуждая предсказуемость состояния Вселенной исходя из исходного момента, Пуанкаре утверждал в 1908 году (по цитате из Lorenz, 1989, стр. 14) :

«... Даже если бы законы природы не таили никаких секретов от нас, мы все равно могли бы знать исходное состояние только *приблизительно*. Если бы мы могли при этом предсказывать последующие состояния с той же степенью *приближения*, то это было бы все, что нам нужно, и мы сказали бы, что явление предсказано, что в его основе лежат [детерминистические] законы. Но это не всегда так; возможно, что малые различия в начальных условиях приведут к очень большим различиям в конечном явлении. Малая ошибка в первом приведет в огромной ошибке в последнем. Предсказание станет невозможным, и мы будем иметь дело со случайным явлением».

Mirowski (1995) считает, что несмотря на стохастичность наблюдаемых явлений и на готовность классической физики включить ее в рассмотрение, классические экономисты неохотно отдавали позиции детерминизма, занимаемые ими с момента возникновения экономики как науки. Неоклассическая экономическая теория отчетливо включила в себя стохастические элементы только в конце 1930-х – начале 1940-х годов. И даже тогда включение стохастических компонентов в так называемую Новую классическую макроэкономическую теорию представляло собой скорее компромисс: стохастические экзогенные шоки налагались (чаще всего, линейно) на детерминистические модели и генерировали динамику, похожую на наблюдаемую в реальных временных рядах. Slutsky (1937) наряду с другими исследователями показал, что динамика линейной динамической модели цикла деловой активности с аддитивным случайным компонентом, не всегда имеющим экономическую интерпретацию, очень близка к динамике, наблюдаемой в реальности.¹ Например, простая линейная модель

¹Интересно, что, пожалуй, наиболее часто цитируемая статья, объединившая классический детерминизм с наблюдаемой стохастичностью экономических процессов, была впервые опубликована в отнюдь не классических кругах. Она была написана тогда еще советским экономистом Евгением Слуцким, когда он работал над динамикой советского цикла деловой активности в Конъюнктурном институте Наркомата финансов СССР

$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$, где ε_t – случайная ошибка (белый шум), соответствует процессу взвешенного скользящего среднего (МА) по ε , который может быть похож на наблюдаемые циклические ряды. Немного более сложный авторегрессионный процесс (ARMA) с двумя и более временными лагами переменной x и с МА-процессом в ошибках тоже может воспроизвести такую динамику. Таким образом, процессы типа ARMA стали следующим шагом в развитии классических детерминистических процессов типа $x_t = \alpha x_{t-1}$, которые, как известно, могут производить обычные осцилляции (см., например, Baumol & Benhabib, 1989).

Однако во многих случаях, такие модифицированные виды простейших классических процессов, часто называемые парадигмой Фриша–Слуцкого, не в состоянии дать экономическое объяснение «экзогенных шоков» и серийной корреляции между ошибками. Более того, многие эмпирические явления не могут быть адекватно описаны с помощью линейных стохастических уравнений. Среди таких явлений часто упоминается отсутствие сходимости в показателях национального дохода на душу населения стран мира, длительные периоды безработицы и наблюдаемые периоды неравной степени волатильности экономических показателей. Например, такие явления обсуждает Jarsulic (1998). Он заключает, что, несмотря на успех, достигнутый с помощью неоклассического подхода в некоторых эмпирических вопросах, многие задачи остаются нерешенными из-за «недостаточной нелинейности» классических моделей.

Lorenz (1989) также замечает (стр. 30), что неспособность отделить на базе наблюдаемых данных линейные модели со стохастическим компонентом от нелинейных моделей подрывает доверие к классическим моделям. Вследствие того, что принятие гипотезы о линейности часто базируется на получении регрессионной оценки для соответствующей модели ARMA с высоким показателем согласия, а проверка на нелинейность связана со сложными тестами, доводы в пользу линейности экономических моделей могут быть преувеличены.

Интересно отметить, что развитие смежных дисциплин имело существенное воздействие на внедрение идей стохастичности в экономическую науку. Например, теория институционализма, зародившаяся в начале века как синтез экономики, психологии и биологии, опровергала классические представления о детерминизме экономических процессов. В противоположность этому, институционалисты предлагали рассматривать прогресс как случайный, ателеологический, динамический процесс эволюции, в рамках которого институты влияют на систему и испытывают на себе ее воздействие в бесконечной череде вариации, селекции и трансмиссии, в которой незначительная вариация может иметь неожиданные, значительные последствия. Таким образом, институционализм воплотил нелинейное динамическое понимание стохастичности с обратной связью, которое становилось доминирующим в науке того времени. Аналогичным образом, статистические работы по цепям Маркова и броуновскому движению, тоже начавшиеся в начале века, привели к возникновению гипотезы случайного блуждания в экономике и к огромному объему теоретических и эмпирических работ, кульминацией которых стала относительно новая дискуссия об эффективности рынков.

Экономисты, недовольные неоклассическими линейными стохастическими объяснениями, искали альтернативные пути. Появились нелинейные экономические модели. В середине XX-го века группа кейнсианских макроэкономистов предложила нелинейные макроэкономические модели, в которых возникала динамика, схожая с реальной (см. примеры таких моделей в работе Lorenz, 1989). С классической стороны экономической науки, внедрение нелинейности привело в возникновению современной теории реального цикла деловой активности, в рамках которой динамика экономических переменных возникает как решение задачи оптимизации во времени и тоже соответствует эмпирически отмеченным характеристикам. При этом считается, что экзогенные шоки вводятся в такие модели для описания отдельных интересующих нас внешних воздействий, а отмеченные характеристики возникают внутри таких нелинейных моделей вне зависимости от экзогенных факторов.

Boldrin & Woodford (1990) и Baumol & Benhabib (1989) перечисляют похожие результаты, полученные во многих областях экономической науки в результате внедрения нелинейности. В числе нелинейных динамических экономических моделей следует отметить модель паутинообразного механизма ценового реагирования, модель оптимального роста, модель с перекрывающимися поколениями, кейнсианские модели бизнес-циклов, модели циклов экономического роста Калдора и Гудвина, модель роста Солоу, модель спроса с адаптивными предпочтениями, мальтусианская и неоклассическая демографическая модели, модели с финансовой обратной связью, модели выбора с эндогенными вкусами, модели роста производительности, модели дуополий и пр. Интересно, что классические модели общего равновесия со стандартным предположением о совершенной конкуренции, совершенном предвидении и совершенной информации тоже могли воспроизводить нетрадиционные колебания.

Kaldor (1940) и Goodwin (1955) стали, пожалуй, наиболее выдающимися и наиболее часто цитируемыми примерами ранней литературы на эту тему. Предложенные этими авторами модели, которые многие считают прототипами нелинейных динамических систем в экономике (см., например, Lorenz, 1989), генерируют динамику на базе эффекта мультипликатора-акселератора с нелинейной функцией инвестиций. Более поздние работы, в которых нелинейные динамические модели применяются для анализа экономических проблем, включают Puu (1997) и Chiarella (1990). Puu (1997) демонстрирует, что предложенный в работе Robinson (1933) анализ проблемы монополистического ценообразования в ситуации, когда кривая предельных издержек пересекает кривую предельной выручки в двух точках, применим также к нелинейным динамическим моделям с нелинейной функцией предельной выручки. Chiarella (1990) предлагает нелинейную интерпретацию паутинообразной динамики. Интересно, что работы начала 70-х годов так называемого «Римского клуба», посвященные экономическому росту и его долгосрочным «пределам», тоже применяют концепции нелинейной динамики. В этих работах экспоненциальные динамические модели роста применялись для описания «конца света», ожидающего человечество (см., например, Cole, 1973). Не станем перечислять все подобные работы, скажем лишь, что нелинейные динамические модели привнесли много нового в наше понимание большого числа экономических явлений, несмотря на то, что явное решение динамической нелинейной системы редко бывает доступно.

Многие из нелинейных детерминистических систем оказались способными генерировать столь беспорядочную динамику, что ни один из общепринятых тестов не мог отделить такую детерминистическую систему от чисто случайного процесса (белого шума). Такие нелинейные динамические модели, способные «генерировать» стохастичность и демонстрирующие сильную зависимость от начальных условий и значений параметров, являются предметом теории хаоса.

Часто считается, что «нелинейная динамика» и «хаос» очень близки по смыслу или вообще синонимы. Однако на самом деле это два разных термина, хотя и возникли они примерно в одно и то же время в 1960–70 гг. как быстро растущие сферы исследования, поначалу в статистике и физике, а вскоре и в экономике и эконометрике. Всякая хаотическая система нелинейна, но не всякая нелинейная система хаотична. Нелинейная динамика может быть выражена в форме нелинейного дифференциального или разностного уравнения. Но существует масса нелинейных моделей, которые не способны генерировать хаотическую зависимость, например, предложенная в работе Robinson (1977) нелинейная модель скользящего среднего, имеющая форму $x_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}$, или предложенная Tong & Lim (1980) пороговая авторегрессионная модель, в которой x_t подчинен разным авторегрессионным процессам в зависимости от своего значения.

Пожалуй, наибольший интерес был вызван моделями, призванными описывать какое-то важное изменение характеристик процесса, часто называемыми «моделями со структурным сдвигом» или «моделями с разными режимами». Наиболее простой вариант таких моделей включает в себя два типа периодов, каждый из которых характеризуется своим значением

среднего и/или дисперсии распределения используемой случайной величины. Более сложные варианты используют цепи Маркова для отражения вероятностей перехода такого процесса из одного режима в другой. Многие считают этот тип нелинейной динамики, введенный в эконометрику в работе Hamilton (1989), одним из наиболее перспективных по отношению к макроэкономическим проблемам (см., например, Pesaran & Potter, 1992).

Одной из возможных альтернатив хаосу является ряд стохастических моделей, которые не генерируют автокорреляцию. Это модели типа ARCH, предложенные в Engle (1982) и обобщенные в Bollerslev (1986). В этих моделях $x_t = \sigma_t \varepsilon_t$, а σ_t^2 представляет собой условную дисперсию ошибки, имеющую форму ARMA-процесса $\sigma_t^2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_{t-1}^2 + \alpha_3 \sigma_{t-1}^2$.

Среди моделей типа ARCH (экспоненциальная, асимметричная, пороговая и др.) наиболее популярными в последнее время, пожалуй, являются так называемые интегрированные модели (IGARCH) и дробно-интегрированные (FIGARCH) модели. По аналогии с интегрированными ARMA-моделями в интегрированных моделях типа GARCH текущая информация о характеристиках процесса (в моделях IGARCH – о его дисперсии) остается одинаково важной для предсказания характеристик процесса (в моделях IGARCH – его волатильности) всех будущих периодов; другими словами, в моделях IGARCH имеется единичный корень в авторегрессионном процессе, описывающем σ_t^2 ; для упомянутого выше простейшего процесса GARCH это означает, что $\alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Однако, в имеющихся временных рядах автокорреляция показателя волатильности медленно уменьшается, а не остается одинаково сильной и не сокращается экспоненциально, как в случае, когда интеграция отсутствует (I(0)). Модель типа FIGARCH, предложенная в работе Baillie, Bollerslev & Mikkelsen (1996), призвана устранить столь существенное различие между I(0) и I(1); недавние примеры использования FIGARCH для моделирования финансовых временных рядов оказались весьма успешными. Модели, совмещающие в себе нелинейные модели волатильности и модели Маркова с множественными режимами, стали следующим этапом нелинейного моделирования (см., например, Beine, Laurent & Lecourt, 2003).

Экономические динамические модели интересны не только с теоретической точки зрения. Эмпирические исследования свидетельствуют в пользу того, что динамические экономические системы нелинейны (Day, 1992; Hsieh, 1991; Baumol & Benhabib, 1989). Однако эти свидетельства касаются только упомянутых нелинейных динамических моделей и не затрагивают хаотических моделей. После головокружительного взлета интерес к хаосу в экономике постепенно ослабевал по мере того, как эмпирические исследования, проводимые в течение последних двух десятилетий, не подтвердили наличие хаотической динамики в экономических данных.

4 Хаотическая динамика в экономике

Если бы не было квантовой механики и теории хаоса, классические взгляды на предсказуемость (вроде отраженных в приведенной выше цитате Лапласа) не исключали бы возможности, что природные процессы могут быть с точностью предсказаны – необходимо только знать воздействующие на них закономерности и начальные условия. Однако в общем случае это невозможно (как видно из приведенной выше цитаты, Пуанкаре предвидел это). Квантовая теория (а именно, принцип неопределенности Гейзенберга) исключает возможность точного определения исходного состояния системы, а теория хаоса утверждает, что из-за этой исходной неточности полной предсказуемости достичь невозможно. Другими словами, детерминизм и предсказуемость могут не иметь ничего общего.

Когда мы измеряем состояние системы, мы обозначаем ее в некоторой, по возможности малой, области пространства, которое определяется всеми возможными состояниями системы. Если бы мир был полностью предсказуем, дальнейшее развитие системы (траектория, или орбита, ее состояний) происходило бы в столь же малой области пространства, созда-

вая тем самым так называемый стабильный аттрактор системы, то есть множество орбит, к которому стремилась бы система, делая свое развитие предсказуемым. Такие аттракторы детерминистических динамических систем, как неподвижные точки, предельные циклы и торы, были известны ранним исследователям нелинейных динамических систем. Однако в начале 60-х годов в число известных аттракторов динамических систем были включены так называемые странные (или хаотические, непредсказуемые) аттракторы. Странный аттрактор, как и всякий аттрактор динамической системы, «притягивает к себе» траектории системы, но траектории долго не остаются близко друг к другу, а быстро расходятся внутри аттрактора и на определенных этапах снова проходят вблизи друг друга. В таком аттракторе траектории случайно перемешаны и никогда не дублируются, сколь близкими ни были бы начальные условия системы. Таким системам чужда долгосрочная предсказуемость.

Постоянное смещение траекторий внутри аттрактора часто описывают как процесс многократного растягивания и складывания аттрактора вдвое, в результате которого аттрактор представляет собой множественные самоподобные складки. Хаотический аттрактор – это фрактал, то есть геометрический объект, последовательное увеличение которого обнаруживает все больше и больше деталей, притом объект остается подобен самому себе на каждом этапе увеличения. Бенуа Мандельброт считается многими основоположником учения о фракталах. В серии основополагающих работ по экономике, геометрии и физике, написанных в 70-е годы, он ввел это понятие в оборот (см., например, Mandelbrot, 1991) и использовал его для решения некоторых старых «задач» (см., например, Mirowski, 1995).

В силу описанного свойства хаотические системы способны генерировать случайную динамику без какого-либо внешнего случайного воздействия. Случайная динамика возникает не потому, что происходит аккумуляция случайных ошибок, а потому, что траектории системы подвержены бесконечному смещению, описанному выше. Часто подчеркивается (см., например, Jarsulic, 1998; Baumol & Benhabib, 1989), что, даже если бы детерминистический закон, лежащий в основе хаотической системы, был точно известен, самая мельчайшая ошибка в измерении начальных условий или в вычислении динамики отдельного периода привела бы к экспоненциально растущей ошибке прогноза. Поэтому в отношении хаотических систем возможен только очень краткосрочный прогноз.

У. Брок, Б. ЛеБарон, Х. Шейнкман, Р. Дей, Дж. Рамсей, У. Дечерт, Д. Шей были в числе первых исследователей хаоса в экономике, когда эта сфера становилась особенно популярной в начале 1980-х годов. Среди множества дифференциальных и разностных уравнений, которые были предложены для моделирования хаотической динамики между x_t и x_{t-1} , в частности, отображение Хенона, отображение Лоренца, уравнение Макей–Гласса, генератор псевдо-случайных чисел и др. (см. список наиболее популярных хаотических отображений в Hsieh, 1991), для демонстрации наиболее подходящим, пожалуй, является отображение, имеющее форму $x_t = \alpha x_{t-1}(1 - x_{t-1})$. Для малых значений α эта система стабильна, но для близких к 4 значений она генерирует хаотическую динамику. Несмотря на то, что это полностью детерминированный процесс, x_t кажется случайной величиной с эмпирической автоковариационной функцией $\rho(k) = \mathbb{E}[x_t x_{t-k}] \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что делает ее схожей с белым шумом. Мельчайшая ошибка в измерении начального условия x_0 экспоненциально увеличивается в x_t , и резкие скачки могут следовать за серией незначительных уменьшений и увеличений.

Первые экономические публикации, посвященные хаосу, были чрезмерно оптимистичными в отношении перспектив использования хаоса и даже построения альтернативной экономической теории на базе теории хаоса. Когда читаешь работы таких популяризаторов хаоса как Дж. Глейк, чья книга о хаосе была лидером продаж по версии газеты *New York Times* в конце 80-х годов, создается впечатление, что наука была на грани переворота. Экономическая наука должна была вот-вот заменить неоклассическую детерминистическую или квази-стохастическую линейную парадигму на более реалистические хаотические объясне-

ния, которые устранили бы такие важные элементы неоклассической теории, как концепции рациональности, предсказуемости и совершенного предсказания.

Однако этот энтузиазм постепенно заметно убавился по мере того, как экономисты, пытающиеся обнаружить хаотическую динамику, наткнулись на препятствия в виде коротких временных рядов и большого набора других нелинейных эффектов, которые могут на самом деле иметь место в экономических данных. Mirowski (1989, 1995) полагает, что именно неоклассическое нежелание воспринимать объяснения, предлагаемые теорией хаоса, сыграло решающую роль в том, что теория хаоса не сделала еще большего переворота в экономике. Однако несложно видеть на базе эмпирических и теоретических работ по хаосу в экономике (см., например, Lorenz, 1989 и Руц, 1997), что, несмотря на множество интересных теоретических разработок в сфере динамики экономических систем, эмпирическая задача по выделению хаотической динамики из экономических временных рядов объективно более сложная, чем в естественных науках, и часто не в состоянии оправдать вложенные в решение этой задачи усилия, с учетом других многообещающих областей нелинейных исследований.

В середине 80-х годов, по-видимому, пришло понимание того, что высокосложный хаотический процесс (то есть нелинейный динамический процесс, действующий много переменных), с практической точки зрения эквивалентен случайному процессу, например, броуновскому движению (см., например, обсуждение генератора псевдо-случайных чисел в Hsieh, 1991 и Brock, Hsieh & LeBaron, 1991), и что только не слишком сложные хаотические системы (хаос малой размерности) могут обладать краткосрочной предсказуемостью, которую невозможно достичь в рамках таких традиционных линейных моделей, как ARMA (см. Baumol & Benhabib, 1989).

Примерно в то же время были разработаны несколько статистических тестов на наличие хаоса малой размерности. Понятие корреляционной размерности, разработанное Grassberger & Procaccia (1983), является, пожалуй, наиболее важным. Оно позволяет проверить данные на наличие хаотической динамики, используя при этом одну характеристику, свойственную хаотическим системам и не свойственную стохастическим системам, а именно наличие «дыр», оставляемых хаотической системой в пространствах большой размерности. Тест осуществляется так. Ряд x_t трансформируется во множество векторных множеств размерности от 1 до n (эта размерность называется «размерность вложения»): $x_t, (x_{t-1}, x_t), \dots, (x_{t-n+1}, \dots, x_t)$. Затем вычисляется доля пар векторов, удаленных друг от друга на расстояние не более d (корреляционный интеграл). Корреляционная размерность – это предел наклона графика логарифма корреляционного интеграла как функции $\log d$ при $n \rightarrow \infty$. Если корреляционная размерность стремится к бесконечности, это означает, что процесс равномерно «заполняет» n -мерное пространство, что значит, что он случайный. Если же корреляционная размерность прекращает рост при некотором значении n , то это говорит в пользу n -мерного хаоса.

Несложно видеть, почему высокосложные хаотические системы (n больше, чем 5) столь сложно обнаружить. Невозможно установить, стремится ли корреляционная размерность к бесконечности, если используются конечные временные ряды. Практически нет разницы между реализацией чисто случайного процесса и многомерным хаосом. Более того, в работе Hsieh (1991) подчеркивается, что, в то время как в естественных науках для тестов на маломерный хаос нередко использовались выборки в 100000 наблюдений и более, наиболее длинные временные ряды в экономике обычно содержали примерно 2000 наблюдений; он отмечает, что двухсот непересекающихся векторов, соответствующих размерности вложения 10, недостаточно, чтобы установить, «заполняют» ли они десятимерное пространство равномерно. Вдобавок, Ramsey, Sayers & Rothman (1990) показывают, что в относительно коротких экономических временных рядах (даже состоящих из 2000 точек) подтверждения наличия хаоса могли быть получены там, где его нет, потому что оценка наклона графика логарифма корреляционной размерности смещена вниз в малых выборках. Они также сделали обзор имеющихся работ, проверяющих экономические данные на наличие хаотической динамики,

и пришли к заключению, что после корректировки на малые выборки в большинстве случаев нет оснований полагать, что был найден простой хаотический аттрактор, а скорее некоторая нелинейная динамика. Этот же результат был получен Scheinkman & LeBaron (1989), которые утверждают, что нелинейные стохастические модели, например, модели типа ARCH, могут генерировать динамику, схожую с динамикой хаотических отображений, и что тест на хаос, базирующийся на корреляционной размерности, может на самом деле отражать наличие именно таких видов нелинейности.

Так называемый BDS-тест, который предложили Brock, Dechert & Scheinkmann (1987), представляет собой улучшенную версию теста корреляционной размерности, поскольку он делает количественную оценку проще. С использованием корреляционной размерности авторам удалось разработать статистику, имеющую предельное нормальное распределение, что сделало возможным тестирование нулевой гипотезы о случайности временного ряда. Hsieh (1991) использовал симуляции Монте-Карло для проверки способности BDS-теста различать между независимыми и одинаково распределенными (НОР) наблюдениями, генерированными одним из «хороших» генераторов псевдо-случайных чисел, и разнообразными видами линейных и нелинейных зависимостей, как стохастических, так и детерминистических. Выяснилось, что BDS-тест отвергает гипотезу НОР для большого множества процессов, в том числе ARMA, GARCH, TAR, моделей со сменой режима и нескольких маломерных хаотических отображений. Проверка данных на случайность, осуществленная автором с помощью BDS-теста в отношении доходности акций, привела к однозначному отвержению гипотезы, что показатель доходности акций есть НОР. Следовательно, нелинейная динамика может иметь вовсе не хаотическое происхождение. Интересно, что Scheinkman & LeBaron (1989) установили с помощью непараметрических методов, что источником нелинейности служит, скорее, условная гетероскедастичность, а не хаотическая динамика, смена режима или какие-то другие факторы. Хотя стандартные модели типа ARCH не исчерпывают все нелинейные свойства данных по доходности акций, более гибкая модель типа GARCH с НОР-ошибками, по-видимому, лучше справляется с задачей. Другие исследователи, работающие с данными об обменных курсах и процентных ставках, почти единогласно подтверждают это заключение.

Было разработано еще несколько тестов на наличие хаоса. В настоящее время ни один из имеющихся тестов не в состоянии предоставить достаточно убедительные свидетельства в пользу хаотической динамики в экономических данных. Отсутствие таких доказательств переориентировало экономистов с задач моделирования условного среднего (в частности, хаотических систем) на задачи моделирования условной дисперсии (модели типа ARCH). Предсказание волатильности вышло на первый план, хотя растущий объем доступных экономических данных все еще дает возможность подтвердить или опровергнуть полученные результаты о том, что маломерного хаоса в экономических данных нет.

5 Заключение

Теория хаоса существенно изменила методологию науки. Классический подход, в соответствии с которым выдвинутые вначале теоретические предсказания впоследствии тестируются на базе эксперимента, не вполне применим к хаотическим процессам. Поскольку долгосрочное предсказание в отношении таких процессов невозможно, проверка теории должна базироваться не на предсказательной способности, а на других, более сложных статистических свойствах выдвигаемой теории.

Исследования в области нелинейной динамики и теории хаоса скорректировали старинную редуccionистскую тенденцию в науке, в частности, в классической экономике, то есть склонность исследовать систему посредством наложения друг на друга отдельных ее элементов. Подобный линейный подход не вполне применим ко всем динамическим системам.

В частности, сложная динамика хаотических систем, которая в существенной мере зависит от взаимодействия элементов, не может быть получена в результате их наложения.

Современные финансово-экономические исследования используют высокочастотные, например, ежесекундные, данные. Без сомнения, наличие таких данных делает тестирование на нелинейность и, в частности, на хаос, более перспективным. Однако, как известно, ежесекундные данные включают в себя множество микрорыночных явлений, таких как прыжки в цене покупателя и цене продавца, выполнение лимитных ценовых ордеров и т.д. (см., например, Hsieh, 1991). Тесты на нелинейность могут улавливать и такие не относящиеся к делу явления, если их не удастся устранить усреднением более продолжительного временного ряда. В свою очередь, более продолжительные временные ряды могут испытывать смену режима. Поскольку тесты на нелинейность могут улавливать и нестационарность, используемые временные ряды должны быть не слишком продолжительны. Это соображение, по-видимому, налагает ограничение на нашу способность обнаружить хаос в экономике.

Усилия по моделированию экономических процессов сейчас переключились на анализ волатильности. Эмпирические доказательства наличия нелинейных видов зависимости во втором, а не первом моменте распределения финансово-экономических случайных величин кажутся убедительными. Одним из примеров таких зависимостей может служить взаимодействие между интервенциями центральных банков и волатильностью на рынках валют.

Теория хаоса представляет собой несколько «неудобную» область экономических исследований. Во-первых, хаотические системы почти непредсказуемы. С теоретической точки зрения увеличение предсказуемости таких систем связано с повышением точности измерения начальных условий и минимизацией ошибок вычислений. Но поскольку ошибки в таких системах аккумулируются чрезвычайно быстро, то, чтобы даже совсем немного увеличить интервал предсказания, необходимо существенно увеличить издержки, что может быть неоправданным с практической точки зрения. Во-вторых, с имеющимися на сегодняшний день экономическими временными рядами невозможно с уверенностью утверждать, что нелинейные зависимости, скрытые в этих рядах, являются хаотическими. Таким образом, исследования в области хаотической динамики в экономике – это технически сложные и дорогие попытки найти то, что с практической точки зрения может быть неоправданным с учетом других вариантов нелинейной динамики, применение которых для прогнозирования имеет куда больше перспектив. История исследований в области хаотических экономических систем показывает, что экономисты в большинстве предпочли переключиться в своих исследованиях на менее «неудобные» задачи.

Тот факт, что маломерный хаос не был обнаружен в экономических данных, не означает, конечно, что хаосу нет места в экономической науке. Теория хаоса, безусловно, обогатила наше представление об общих свойствах нелинейных динамических систем. Более того, экономические системы могут быть многомерными. В настоящее время многомерный хаос (даже если бы он существовал в экономических данных) не может быть использован для улучшений качества прогнозов, так как в условиях конечного объема данных многомерный хаос и стохастичность – фактически одно и то же. Однако по мере улучшения систем сбора и обработки данных ситуация может измениться.

Невозможность построения прогнозов на базе многомерных хаотических (или чисто стохастических) систем (о которой говорится в эпиграфе Хокинга к данному эссе) соответствует мнению Бенуа Мадельброта, которые считал (см. Mirowski, 1995), что большинство процессов находятся где-то между чистым детерминизмом и белым шумом и могут быть одинаково успешно описаны и как сложные стохастические процессы, и как хаотические процессы.

Неразделимость детерминизма (многомерного хаоса) и стохастичности, свойственная экономическим нелинейным исследованиям, также находится в соответствии с философской традицией двойственности в вопросах о свободе воли и телеологии. Даже если бы нам были известны все закономерности Вселенной, мир все равно был бы случайным, ведь слож-

ный регулярный закон и есть случайность. В своей работе о свободе воли человека Поррер (1966) писал об «облаках», которые «крайне нерегулярны, неупорядочены и более или менее непредсказуемы», и о «часах», «поведение» которых «регулярно, упорядочено и хорошо предсказуемо» (стр. 5):

«Мир – это система, в которой облака взаимосвязаны с часами, ... в определенной мере, все часы – это облака; ... существуют только облака, хотя и разной степени облачности».

Список литературы

- Baillie, R.T., T. Bollerslev & H. Mikkelsen (1996). Fractionally intergrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 74, 3–30.
- Baumol, W. & J. Benhabib (1989). Chaos: Significance, mechanism, and economic implications. *Journal of Economic Perspectives* 3, 77–105.
- Beine, M., S. Laurent & C. Lecourt (2003). Official Central Bank interventions and exchange rate volatility: Evidence from a regime-switching analysis. *European Economic Review* 47, 891–911.
- Boldrin, M. & M. Woodford (1990). Equilibrium models displaying endogenous fluctuations and chaos. *Journal of Monetary Economics* 25, 189–222.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 301–327.
- Brock, W., W. Dechert & J. Scheinkmann (1987). A test for independence based on the correlation dimension. Working Paper, University of Wisconsin–Madison.
- Brock, W., D. Hsieh & B. LeBaron (1991). *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability*. Cambridge: MIT Press.
- Chiarella, C. (1990). *The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics*. Berlin: Springer.
- Cole, H. (1973). *Models of Doom*. A critique of the *Limits to Growth*, with a reply by the authors of the *Limits to Growth*. New York: Universe Books.
- Crutchfield, J.P., J.D. Farmer, N.H. Packard & R.S. Shaw (1986). Chaos. *Scientific American* 255, 46–57.
- Day, R.H. (1992). Complex economic dynamics: Obvious in history, generic in theory, elusive in data. *Journal of Applied Econometrics* 7, S9–S23.
- Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica* 50, 987–1007.
- Gleick, J. (1991). Chaos. Глава в Т. Ferris (ed.). *The World Treasury of Physics, Astronomy, and Mathematics*. Boston: Little, Brown and Company.
- Goodwin, R. (1955). A model of cyclical growth. Глава в Е. Lundberg (ed.). *The Business Cycle in the Post-War World*. London: Macmillan.
- Grassberger, P. & I. Procaccia (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica* 9D, 189–208.
- Hamilton, J. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica* 57, 357–384.
- Hsieh, D. (1991). Chaos and nonlinear dynamics: Application to financial markets. *Journal of Finance* 46, 1839–1877.
- Jarsulic, M. (1998). Chaos in economics. Глава в У. Маеки (ed.). *Handbook of Economic Methodology*. Cheltenham: E. Elgar.
- Kaldor, N. (1940). A model of the trade cycle. *Economic Journal* 50, 78–92.
- Lorenz, H.-W. (1989). *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Berlin: Springer-Verlag.
- Mandelbrot, B. (1991). How long is the coast of Britain? Глава в Т. Ferris (ed.). *The World Treasury of Physics, Astronomy, and Mathematics*. Boston: Little, Brown and Company.
- Marshall, A. (1949). *The Principles of Economics*, 8th edition. London: Macmillan.
- Mill, J.S. (2000). *Essays on Some Unsettled Questions of Political Economy*. Kitchener: Batoche Books.

- Mirowski, P. (1989). Tis a pity econometrics isn't an empirical endeavor: Mandelbrot, chaos, and the Noah and Joseph effects. *Recherche Economique* 43, 76–99.
- Mirowski, P. (1995). Mandelbrot's economics after a quarter century. *Fractals* 3, 1–20.
- Mitchell, W. (1925). Quantitative analysis in economics theory. *American Economic Review* 15, 1–12.
- Pesaran, M. & S. Potter (1992). Nonlinear dynamics and econometrics: An introduction. *Journal of Applied Econometrics* 7, S1–S7.
- Popper, K. (1966). *Of clouds and clocks; an approach to the problem of rationality and the freedom of man*. St. Louis: Washington University.
- Puu, T. (1997). *Nonlinear Economics Dynamics*. Berlin: Springer.
- Ramsey, J.B., C.L. Sayers & P. Rothman (1990). The statistical properties of dimension calculations using small data sets: Some economic applications. *International Economic Review* 31, 991–1020.
- Robinson, J.T. (1933). *The Economics of Imperfect Competition*. Cambridge University Press.
- Robinson, P. (1977). The estimation of nonlinear moving average model. *Stochastic Processes and Their Applications* 5, 81–90.
- Scheinkman, J. & B. LeBaron (1989). Nonlinear dynamics and stock returns. *Journal of Business & Economic Statistics* 62, 311–337.
- Slutsky, E. (1937). The summation of random causes as the source of cyclic processes. *Econometrica*, 5, 105–146.
- Tong, H. & K. Lim (1980). Threshold autoregression, limit cycles, and cyclical data. *Journal of Royal Statistical Society (Series B)* 42, 245–292.

Nonlinear dynamics and chaos theory in economics: a historical perspective

Artem Prokhorov

Concordia University, Montréal, Canada

This essay focuses on the genesis of ideas of nonlinearity, stochastics, and dynamics in economic thought as a series of intellectual advances that connected the linear static (quasi-dynamic) determinism of the 18th–19th centuries with the linear mechanistic systems with stochastic terms and the nonlinear deterministic and stochastic dynamic models of the late 20th century, specifically, the chaos theory. The emphasis is placed on the developments of the second half of the 20th century. Technicalities are avoided.

Статьи: прикладная эконометрика

Кривая заработных плат: теория и эмпирика^{*}

Андрей Шилов[†]

Университет Регенсбурга, Германия

Йоахим Мёллер[‡]

Университет Регенсбурга, Германия

В работе рассматривается концепция кривой заработных плат, описывающая негативную взаимосвязь между уровнем безработицы и уровнем заработных плат. Авторы предлагают объяснение кривой заработных плат при помощи ряда теоретических моделей рынка труда, а также представляют эмпирический результат определения кривой для России, полученный на основе анализа региональных данных.

Ключевые слова: Россия, кривая заработных плат, модели рынка труда, панельные данные

Классификация JEL: C23, J30, J60

1 Введение

В классическом представлении рынок труда является конкурентным, как и другие рынки. Как следствие этого, безработица в «конкурентных» моделях считается результатом избыточного предложения рабочей силы, связанного с высокой заработной платой. В реальности рынок труда несовершенен, и классический механизм взаимосвязи между безработицей и заработной платой часто не находит эмпирического подтверждения. Существуют также «неконкурентные» модели рынка труда (Shapiro & Stiglitz, 1984; Blanchflower, Oswald & Senfey, 1996), рассматривающие связь между высокой безработицей и низкой заработной платой. Одной из причин разрушения конкурентной среды на рынке труда является государственное регулирование рынков, особенно распространенное в Европе (подробно этот вопрос рассматривается в работе Blanchard & Giavazzi, 2003). В «неконкурентных» моделях высокая безработица ведет к ослаблению переговорных позиций работников и позволяет работодателям в условиях низкой конкуренции удерживать заработную плату на низком уровне.

Возможным эмпирическим отражением «неконкурентных» моделей является кривая заработных плат (*wage curve*), концепция которой была предложена в статье Blanchflower & Oswald (1990). Формирование концепции происходило на основе эмпирических исследований, проведенных в работе Blanchflower & Oswald (1990) для локальных рынков труда Великобритании. Были исследованы различные виды уравнения Минцера (*Mincer wage equation*) для локальных рынков труда Великобритании (отраслевых или территориальных). В результате была получена зависимость, из которой следует, что при удвоении безработицы заработная плата на данном рынке уменьшается на 10%. Эта величина, $-0,1$, является эластичностью заработной платы.

^{*}Цитировать как: Шилов, Андрей и Йоахим Мёллер (2008). «Кривая заработных плат: теория и эмпирика», Квантиль, №4, стр. 93–100. Citation: Shilov, Andrey and Joachim Möller (2008). “Wage curve: theory and empirics,” Quantile, No.4, pp. 93–100.

[†]Адрес: Department of Economics, University of Regensburg, Universitätsstraße 31, D-93053 Regensburg, Germany. Электронная почта: zrk1@yandex.ru

[‡]Адрес: Department of Economics, University of Regensburg, Universitätsstraße 31, D-93053 Regensburg, Germany. Электронная почта: joachim.moeller@wiwi.uni-regensburg.de

После Великобритании родоначальники кривой провели подобные исследования для других стран, в том числе США (Blanchflower & Oswald, 1990, 1994, 2005). В последующие годы различные авторы, в частности Baltagi, Blien & Wolf (1998) и Blanchflower (2001), определили кривые для европейских стран и отдельных стран Латинской Америки и Африки. В результате проведенных исследований на сегодняшний день существуют кривые для 40 стран мира. Для многих из них значение эластичности заработной платы близко к $-0,1$, что дало повод для рассмотрения кривой заработных плат в качестве «эмпирического закона» (см. Card, 1995; Townsend, 2005).

В работе Blanchflower & Oswald (1994) кривая предлагается в качестве альтернативы кривой Филлипса. «Конкурирующая» кривая характеризуется в статье следующим образом: “A.W. Phillips curve ... is, if anything at all, a kind of misspecified aggregate wage curve”. С этой оценкой не согласно значительное количество авторов, например Card (1995), Blanchard & Katz (1997), Whelan (1997), предлагающие использовать авторегрессионные, динамические модели для микроданных, на которых основана кривая заработных плат. Возможно, что кривые не связаны друг с другом, а характеризуют разные явления на рынке труда. Между кривыми существует принципиальное различие: кривая заработных плат является структурной долгосрочной взаимосвязью между уровнем безработицы и уровнем заработных плат, в то время как в кривой Филлипса показана краткосрочная циклическая взаимосвязь между изменениями уровня безработицы и уровня цен. В работе Blanchflower & Oswald (1994) отрицается возможность авторегрессии по отношению к заработной плате, то есть, по мнению авторов, кривая заработных плат в отличие от кривой Филлипса не является динамической.

Попытка британских исследователей заменить кривую Филлипса своей натолкнулась на серьезную критику (Blanchard & Katz, 1997; Card, 1995; Whelan, 1997) в связи с тем, что отсутствует структурная модель, адекватно описывающая кривую заработных плат. Также критикуется эконометрическая часть работы, в частности, то, что кривая заработных плат может быть «смещенной» из-за возможной эндогенности, неучтенной авторами.

В одной из последних теоретических работ по кривой заработных плат Montuenga-Gómez & Ramos-Parreño (2005) предлагают рассматривать ее и кривую Филлипса как два несовместимых проявления на рынке труда. Кривая Филлипса показывает изменение номинальной заработной платы до уровня, необходимого для компенсации избыточного предложения на рынке труда. Кривая заработных плат показывает равновесный уровень заработных плат и безработицы.

2 Теория

Универсальной теории, которая бы полностью описывала эмпирически полученную кривую, на данный момент нет. В литературе, например, Blanchflower & Oswald (1990, 1994, 2005), Blanchflower (2001), Blien (2003), Montuenga-Gómez & Ramos-Parreño (2005), Townsend (2005), предпочтение отдается неконкурентным теоретическим моделям, таким как Shapiro & Stiglitz (1984), Blanchflower, Oswald & Sanfey (1996). В данных моделях уровень безработицы играет важную роль в определении уровня заработной платы при проведении переговоров (Blanchflower, Oswald & Sanfey, 1996) либо при назначении работодателем премии за отсутствие манкирования (Shapiro & Stiglitz, 1984). Ниже приводится краткое изложение неоклассической модели рынка труда и «неконкурентных» моделей.

Неоклассическая модель рынка труда предполагает равновесие между спросом и предложением на конкурентном рынке. Рост заработной платы ведет к росту предложения и одновременно к снижению спроса на труд. Как результат избыточного предложения возникает безработица. Данные, полученные при определении кривой заработных плат, напротив, связывают низкие заработные платы и высокую безработицу, что полностью противоречит неоклассической модели избыточного предложения. Таким образом, возникновение зависи-

мости между высокой безработицей и низкими заработными платами необъяснимо при использовании конкурентной модели.

В качестве одной из теоретических моделей предлагается модель переговоров между работниками и работодателями по Нэшю (Blanchflower, Oswald & Sanfey, 1996), которая отражает переговоры между работодателями и профсоюзами на локальном уровне. При проведении переговоров профсоюзы учитывают фоновый уровень безработицы в данном регионе среди работников схожих профессий. Целью переговоров является распределение ренты, возникающей в результате работы предприятия. Чем выше уровень безработицы среди работников схожих профессий в регионе, тем меньше вероятность получения ими альтернативного заработка в случае провала переговоров с конкретной фирмой. Переговорные позиции профсоюзов ослабевают, и снижается доля ренты, которую получают работники; таким образом, возникает негативная взаимосвязь между уровнем безработицы и уровнем заработной платы. Применение данной модели приемлемо в странах с децентрализованной системой переговоров между профсоюзами и работодателями (Blien, 2003).

Для стран с преобладанием отраслевых тарифных соглашений как наиболее подходящая рассматривается модель эффективных зарплат Шапиро–Стиглица (Shapiro & Stiglitz, 1984). В ней увязаны уровень заработной платы и уровень занятости. Основным предположением в модели является невозможность со стороны работодателя обеспечить полный контроль за добросовестностью своих работников. Проблему недостаточного контроля в модели предложено решать за счет дополнительной премии к заработной плате за отсутствие пренебрежения рабочими своими обязанностями. Чем ниже занятость в регионе, и, соответственно, выше предложение на рынке труда, тем ниже премия за отсутствия манкирования, которую работодатель должен платить работникам в дополнение к заработной плате за добросовестное отношение к труду. Таким образом, в модели реализуется механизм негативной взаимосвязи между заработными платами и безработицей, отраженный в кривой заработных плат.

Использование модели Шапиро–Стиглица для описания кривой заработных плат ограничено тем, что она рассматривает макроэкономический рынок. В качестве выхода из этой ситуации предлагается рассматривать региональные рынки в качестве маленьких, изолированных макроэкономик со своим специфическим уровнем безработицы. Данное условие может быть принято только с учетом низкой межрегиональной мобильности населения, создающей эффект изолированности рынков (Andrienko & Guriev, 2004). Несмотря на это спорное условие, в настоящий момент модель эффективных зарплат рассматривается как наиболее адекватная для описания взаимосвязи в кривой заработных плат.

3 Предмет исследования

Впервые кривая заработных плат для России была представлена в статье Blanchflower (2001). При проведении анализа для РФ автором использовались данные периода 1995–1997 гг. из 14 регионов. Данные о номинальных заработных платах были получены путем опроса граждан и номинированы в рублях. В результате проведенного анализа была получена эластичность заработной платы, равная $-0,175$. Данная эластичность в статье Blanchflower (2001) объясняется неурегулированностью рыночных отношений и, в частности, неотработанным механизмом переговоров между работниками и работодателями.

Число опрошенных и временной период (2 года) не дают достаточного количества наблюдений для признания выборки репрезентативной. Использование при расчетах номинальной заработной платы в рублях, значение которой получено путем опросов, скорее всего, не отражает объективно средний уровень заработных плат в регионе. Задачей нашего исследования является определение связи между уровнем безработицы и уровнем заработных плат на основе более полного набора данных.

Для решения проблемы нестабильности в условиях высокого темпа роста цен нами пред-

лагается следующий подход. Исходя из высокой инфляции в России в описываемый период (Рис. 1) и неспособности ЦБ долгое время удерживать инфляцию под контролем, решено использовать номинальную заработную плату в долларовом выражении. Подробно теоретические основы долларизации экономики при высокой инфляции рассматриваются в статье Levina & Zamulin (2006).

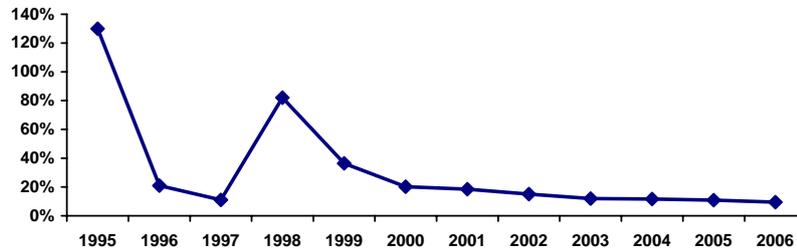


Рис. 1: Уровень инфляции. Источник: Росстат.

В условиях высокой и непредсказуемой инфляции переговоры о номинальной заработной плате в национальной валюте неэффективны, так как связаны с высокими транзакционными издержками. Кроме того, индексация заработной платы в национальной валюте должна происходить с высокой частотой, ведущей к необходимости частых переговоров между работниками и работодателями. Это требует от работников дополнительных расходов на мониторинг инфляции в ежемесячном режиме. Для снижения частоты переговоров и транзакционных издержек необходимо использование стабильного эквивалента рубля при проведении переговоров между работниками и работодателями. В российской ситуации относительно стабильной величиной на протяжении описываемого периода был курс доллара США, так как до кризиса 1998 г. ЦБ придерживался политики жесткого курса или «валютного коридора».

Политика переговоров о заработной плате в долларовом эквиваленте позволяла работникам до кризиса 1998 г. компенсировать инфляцию и добиваться прироста заработной платы как в рублях, так и в долларовом эквиваленте (Рис. 2). В ситуации резкой девальвации рубля

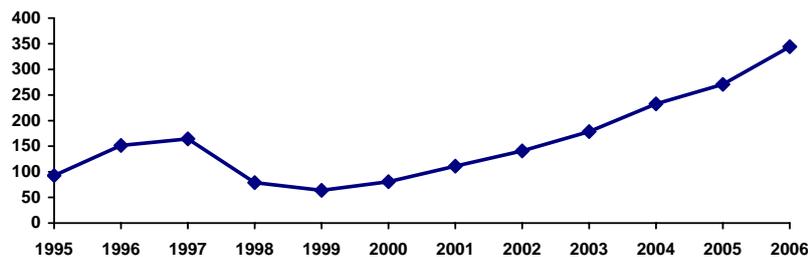


Рис. 2: Заработная плата в долларах США. Источник: Росстат.

в 1998 г. ЦБ нарушил свое «обещание» удерживать валютный курс стабильным. Девальвация не была учтена при формировании ожиданий участниками рынка в прошлом периоде, что могло привести к снижению уровня долларовой заработной платы. Девальвация рубля и снижение долларовой заработной платы могли стать одним из движущих факторов роста занятости населения. На Рис. 3 хорошо видно, что пик безработицы пришелся на конец 1998 г. и начало 1999 г. Общий механизм действия неожиданных инфляционных (в данном случае девальвационных) шоков на реальную заработную плату, а через нее на занятость, показан в модели Barro & Gordon (1983). Начиная с 2000 г., долларовая заработная плата снова увеличивается. Это свидетельствует об адаптации участников рынка к новому курсу доллара, формировании правильных ожиданий относительно его развития и возвращении доверия к

курсовой политике ЦБ.

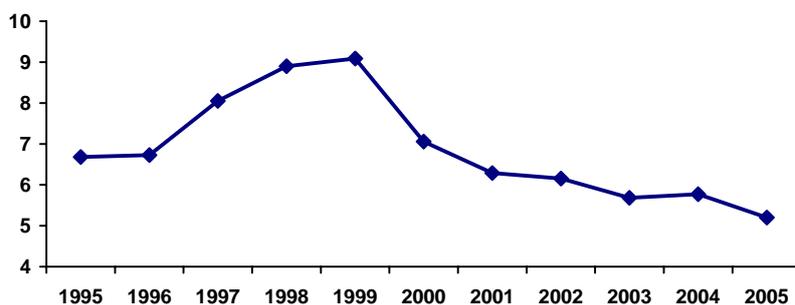


Рис. 3: Количество безработных в РФ в миллионах. Источник: Росстат.

Таким образом, использование номинальной заработной платы в долларах США при определении кривой заработной платы для России больше отвечает реалиям российского рынка труда.

4 Эмпирические методы и результаты

В работе использованы данные о номинальной средней заработной плате в регионе в долларовом (по среднегодовому курсу) и рублевом выражении, а также количество безработных в 82 регионах РФ в период с 1995 по 2005 гг. Данные о количестве безработных были взяты не из числа зарегистрированных безработных, а из публикуемого Росстатом количества безработных (оценочная величина по методике Международной организации труда), что более соответствует реальному предложению на рынке труда. Несмотря на оценочный характер переменной «количество безработных», она точнее описывает ситуацию на рынке труда. Этот феномен связан с тем, что в европейских странах безработные стремятся зарегистрироваться для получения пособия в отличие от РФ, где размер пособий по безработице настолько незначителен, что не стимулирует безработных вставать на учет. При проведении анализа не были использованы данные из Чеченской Республики, Еврейского АО, Коми-Пермяцкого АО, Усть-Ордынского Бурятского АО, Корякского АО и Ненецкого АО. На основе описанных данных была сконструирована сбалансированная панель, и проведен эконометрический анализ при помощи программы STATA.

Оцениваемая модель имеет вид

$$\ln w_{it} = \alpha_i + \beta \ln u_{it} + \delta_t + \varepsilon_{it}, \quad (1)$$

где w_{it} – номинальная заработная плата в долларах США по среднегодовому курсу, u_{it} – оценочное количество безработных в регионе, α_i – фиксированный региональный эффект, δ_t – фиктивная переменная для года наблюдения, и $\varepsilon_{it} = \rho\varepsilon_{it-1} + z_{it}$ с $|\rho| < 1$ и независимыми z_{it} . Для сравнения мы приводим результаты и с использованием номинальной заработной платы в рублях аналогично статье Blanchflower (2001). В качестве метода анализа применялся обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК), что связано с автокорреляцией ошибок. ОМНК с фиксацией региональных эффектов наиболее соответствует концепции кривой, и его можно считать «классическим» при определении кривой заработной платы, так как он применяется в большинстве статей по этой теме: Blanchflower & Oswald (1990, 1994, 2005), Blanchflower (2001), Baltagi, Blien & Wolf (1998). Путем фиксации региональных эффектов учитывается влияние специфических региональных особенностей (таких как уровень цен и рост производительности) на взаимосвязь между заработной платой и безработицей. Справедливость выбора фиксированных региональных эффектов подтверждается тестом Хаусмана (Hausman, 1978) (значение статистики 9,79). Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1. Кривая заработных плат 1995–2005 (ОМНК)

Регрессор	Зарплаты в US\$	Зарплаты в рублях
Константа	4,256 (90,5)	5,925 (214,)
$\ln u_{it}$	-0,094 (-4,81)	-0,065 (-5,72)
NT	902	902
R^2	0,495	0,597

Замечание: в скобках приведены t-статистики.

При использовании временного ряда 1995–2005 гг. с помощью теста Чау (Chow, 1960) был идентифицирован структурный сдвиг (значение статистики 586). Несмотря на наличие структурного сдвига, было решено использовать для исследования весь временной период без разбивки его на подпериоды до и после сдвига. Это обуславливается тем, что сдвиг был связан с экзогенным шоком, а не изменением взаимосвязи между уровнем заработной платы и уровнем безработицы. Дополнительно проведенное ОМНК-оценивание с подпериодами до 1998 г. (эластичность заработной платы 0,40, t-статистика 6,16) и после 1998 г. (эластичность заработной платы 0,35, t-статистика 7,43) подтверждает это предположение.

В результате мы получили эластичность долларовой заработной платы, равную -0,094. Она полностью соответствует предложенному в работах Blanchflower & Oswald (1990, 1994, 2005) общему виду кривой заработных плат. Для рублевой заработной платы эластичность равна -0,065, что значительно ниже, чем -0,175, представленной в статье Blanchflower (2001), и несколько ниже, чем эластичность -0,094, полученная при использовании долларовой заработной платы. В то же время нельзя исключать, что при «дедолларизации» экономики эластичность номинальной заработной платы в рублях может приблизиться к эластичности ее долларового эквивалента.

Таблица 2. Кривая заработных плат 1998–2005 (ОММ)

Регрессор	Оценка
Константа	0,346 (50,9)
$\ln w_{it-1}$	0,935 (60,0)
$\ln w_{it-2}$	-0,274 (-29,7)
$\ln u_{it}$	-0,0355 (-3,13)
NT	574

Замечание: в скобках приведены t-статистики.

В работах Blanchflower & Oswald (1990, 1994, 2005) предполагается, что кривая заработных плат не эндогенна. В реальности, тем не менее, некоторые авторы отмечают возможное наличие эндогенности; см. Townsend (2005) и Montuenga-Gómez & Ramos-Parreño (2005). Это связано с тем, что данная модель является моделью общего равновесия, где происходит оценка корреляции, а не структурного параметра. Так как наличие эндогенности вероятно, для подтверждения достоверности полученных результатов было решено использовать обобщенный метод моментов (ОММ, Arellano & Bond, 1991) модели

$$\ln w_{it} = \alpha_i + \beta_1 \ln w_{it-1} + \beta_2 \ln w_{it-2} + \beta_3 \ln u_{it} + \delta_t + \varepsilon_{it} \quad (2)$$

с теми же обозначениями. Данный динамический метод показывает краткосрочную взаимосвязь между зависимой и независимой переменными в панели. На основе краткосрочных

взаимосвязей можно вычислить и равновесную (долгосрочную) взаимосвязь между переменными. Для нейтрализации возможного влияния структурного сдвига в динамической панели взят временной период с 1998 по 2005 гг. В качестве независимой переменной использовалась заработная плата в долларах.

В таблице 2 представлены результаты двушагового ОММ (2ШОММ). ОММ дает состоятельные оценки при условии отсутствия автокорреляции второго порядка в ошибках уравнения первой разности. В нашем случае гипотеза об отсутствии автокорреляции второго порядка не отклоняется (значение статистики 0,22).

По результатам, полученным при использовании 2ШОММ, было произведено вычисление зависимости для равновесного уровня заработной платы и безработицы, и получена эластичность

$$\frac{\partial \ln w^*}{\partial \ln u^*} = \frac{-0,0355}{1 - (0,935 - 0,274)} = -0,104. \quad (3)$$

Данная эластичность соответствует полученной при использовании ОМНК на временным периоде 1995–2005 гг. и предложенной в Blanchflower & Oswald (1990, 1994, 2005). Учитывая эндогенность и структурный сдвиг, результат (3) можно считать достоверно описывающим кривую заработных плат. Можно сделать вывод, что для страны с нестабильной и высокой инфляцией целесообразно использовать номинальную заработную плату, выраженную в более стабильных единицах, чем национальная валюта.

5 Заключение

Мы показали, что кривая заработных плат для России вписывается в модель общего вида, предложенную в Blanchflower & Oswald (1990, 1994, 2005). При этом степень ригидности российского рынка труда соответствует «общеевропейской». Этот результат особенно интересен тем, что институты российского рынка труда начали формироваться относительно недавно, и российская экономика в целом относится к развивающимся.

Российский рынок труда вполне соответствует теоретическим предположениям, взятым за основу в концепции кривой заработных плат. Низкая мобильность населения (Andrienko & Guriev, 2004) сочетается с отсутствием отраслевых тарифных соглашений в негосударственном секторе экономики. Все это дает возможность рассматривать российские регионы (за исключением столичных) как изолированные рынки труда, где фоновый уровень безработицы определяет переговорные позиции сторон.

Несмотря на то, что к настоящему моменту кривая заработных плат определена для 40 стран, она остается достаточно спорной концепцией. За 17 лет с момента первой публикации она не получила такого широкого признания в науке, как кривая Филлипа, что во многом связано с отсутствием общепризнанной теории. Однако в последнее время исследователи пришли к заключению (Montuenga-Gómez & Ramos-Parreño, 2005), что при отсутствии полноценной теоретической модели кривая подтверждает неокейнсианское представление о рынке труда. На основе кривой заработных плат можно сделать вывод о ригидностях на этом рынке, а также о зависимости низких заработных плат от высокой безработицы.

Результаты, полученные нами при определении кривой, могут рассматриваться как эмпирическое опровержение неоклассических представлений о рынке труда и причинах безработицы.

Благодарности

Авторы благодарят Станислава Анатольева, Эндрю Освальда и анонимных рецензентов за их комментарии и советы при написании работы.

Список литературы

- Andrienko, Y. & S. Guriev (2004). Determinants of interregional mobility in Russia: evidence from panel data. *Economics of Transition* 12, 1–27.
- Arellano, M. & S.R. Bond (1991). Some specification tests for panel data: Monte Carlo evidence and an application to employment equations. *Review of Economic Studies* 58, 277–298.
- Baltagi, B.H., U. Blien & K. Wolf (2000). The East German wage curve 1993–1998. *Economics Letters* 69, 25–31.
- Barro, R.J. & D.B. Gordon (1983). A positive theory of monetary policy in a natural rate model. *Journal of Political Economy* 91, 589–610.
- Blanchard, O.J. & F. Giavazzi (2003). Macroeconomic effects of regulation and deregulation in goods and labor markets. *Quarterly Journal of Economics* 118, 879–907.
- Blanchard, O.J. & L. Katz (1997). What we know and do not know about the natural rate of unemployment. *Journal of Economic Perspectives* 11, 51–72.
- Blanchflower, D.G. (2001). Unemployment, well-being, and wage curves in Eastern and Central Europe. *Journal of the Japanese and International Economies* 15, 364–402.
- Blanchflower, D.G. & A.J. Oswald (1990). The wage curve. *Scandinavian Journal of Economics* 92, 215–235.
- Blanchflower, D.G. & A.J. Oswald (1994). Estimating a wage curve for Britain. *Economic Journal* 104, 1025–1043.
- Blanchflower, D.G. & A.J. Oswald (2005). The wage curve reloaded. NBER Working Paper No. 11338.
- Blanchflower, D.G., A.J. Oswald & P. Sanfey (1996). Wages, profits, and rent-sharing. *Quarterly Journal of Economics* 111, 227–251.
- Blien, U. (2003). Die Lohnkurve: Auswirkungen der regionalen Arbeitslosigkeit auf das Lohnniveau. *Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung* 36, 439–460.
- Card, D. (1995). The wage curve: A review. *Journal of Economic Literature* 33, 785–799.
- Chow, G.C. (1960). Tests of equality between sets of coefficients in two linear models. *Econometrica* 28, 591–605.
- Hausman, J.A. (1978). Specification tests in econometrics. *Econometrica* 46, 1251–1271.
- Levina, I. & O. Zamulin (2006). Foreign currency pricing. *Journal of Money, Credit, and Banking* 38, 679–696.
- Montuega-Gómez, V.M. & J.M. Ramos-Parreño (2005). Reconciling the wage curve and the Phillips curve. *Journal of Economic Surveys* 19, 735–763.
- Shapiro, C. & J.E. Stiglitz (1984). Equilibrium unemployment as a worker discipline device. *American Economic Review* 73, 433–444.
- Townsend, R.R. (2005). Choosing among competing theories of the wage curve. Manuscript, Stanford University.
- Whelan, K. (1997). Wage curve vs. Phillips curve: Are there macroeconomic implications? Manuscript, Federal Reserve Board.

Wage curve: theory and empirics

Andrey Shilov

University of Regensburg, Germany

Joachim Möller

University of Regensburg, Germany

We consider the concept of a wage curve describing a negative relationship between unemployment and wages. We suggest an explanation of the wage curve using a number of theoretical labor market models, and present an empirical result of its determination for Russia obtained from analysis of regional data.

Keywords: Russia, wage curve, labor market models, panel data

JEL Classification: C23, J30, J60

Quantile

#4, March 2008

English page in the world wide web: <http://quantile.ru/eng>

Electronic mail address: quantile@quantile.ru

Access to the journal is free and unlimited

EDITOR

Stanislav Anatolyev
New Economic School (Moscow, Russia)

EDITORIAL COUNSEL

Victoria Zinde-Walsh
McGill University (Montréal, Canada)

Rustam Ibragimov
Harvard University (Cambridge, USA)

Anna Mikusheva
Massachusetts Institute of Technology (Cambridge, USA)

Alexey Onatsky
Columbia University (New York, USA)

Vladimir Pavlov
Queensland University of Technology (Brisbane, Australia)

Konstantin Tyurin
Indiana University (Bloomington, USA)

Alexander Tsyplakov
Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russia)

Victor Chernozhukov
Massachusetts Institute of Technology (Cambridge, USA)

GUIDE TO AUTHORS

Manuscripts for publication in the “Articles” section should be submitted by electronic mail to the address submit@quantile.ru. Submitted work may be drawn from any applied field within the economics profession. The main requirement is correct usage of adequate econometric methodology. The manuscript should be written in Russian (for Russian-speaking persons) or in English (for all others) in the *Microsoft Word* or (preferably) *LaTeX* formats, and not exceed 30 double-spaced A4 pages. All submissions are subject to quality control by the editorial counsel and independent referees. A promising manuscript may be returned to the author(s) for polishing or rewriting. The editor also invites econometrics experts worldwide to contribute to the methodological sections of the journal.

Articles and methodological material published in “Quantile” do not transfer original copyright, neither in full, nor in part.

Quantile

*international econometric journal
in Russian language*

**#4
March 2008**

IN THIS ISSUE

Econometric literacy: nonparametric analysis

Creel, Michael. Some possible pitfalls of parametric inference	1
Racine, Jeffrey. Nonparametric econometrics: a primer	7
Zinde-Walsh, Victoria. Consequences of lack of smoothness in nonparametric estimation	57

Advice to econometrics students

Anatolyev, Stanislav. Making econometric reports	71
--------------------------------------------------	----

History of econometrics

Prokhorov, Artem. Nonlinear dynamics and chaos theory in economics: a historical perspective	79
----------------------------------------------------------------------------------------------	----

Articles: applied econometrics

Shilov, Andrey; Möller, Joachim. Wage curve: theory and empirics	93
------------------------------------------------------------------	----