

Эконометрический ликбез: ограниченные зависимые переменные

Оценивание моделей дискретного выбора и моделей с цензурированием*

Эрик Бьорн[†]

Университет Осло, Осло, Норвегия

В настоящих заметках содержится обзор вопросов спецификации модели, функции правдоподобия и структуры задач максимального правдоподобия для моделей дискретного выбора и моделей с цензурированием. Первая часть касается оценивания в случае одного уравнения с одномерными (кросс-секционными) наблюдениями. Другая часть расширяет постановку на случай двух уравнений. Последняя часть рассматривает расширение на ситуацию панельных данных.

1 Одномерные (кросс-секционные) данные

1.1 Отправная точка

Отправной точкой является следующее уравнение:

$$y_i^* = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta} + \sigma \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \text{IIN}(0, 1), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где i обозначает номер наблюдения, IIN символизирует «одинаково, независимо и нормально распределены», y_i^* – значение эндогенной переменной для наблюдения i , \mathbf{x}_i – вектор-строка наблюдаемых ковариат (экзогенных переменных), $\boldsymbol{\beta}$ – вектор-столбец коэффициентов, σ – положительная константа, и ε_i – ненаблюдаемый случайный шум. Мы не наблюдаем (y_i^*, \mathbf{x}_i) для всех i . Различия между тремя моделями, представленными ниже, определяются тем, как наблюдаются пары (y_i^*, \mathbf{x}_i) . Эти три модели представляют из себя вариации на одну тему: модели с ограниченной наблюдаемостью эндогенных переменных. Мы будем обозначать наблюдения как (y_i, \mathbf{x}_i) . Нашей целью является несмещенная инференция о $\boldsymbol{\beta}$, т.е. об эффекте изменений в \mathbf{x}_i на y_i^* , исходя из множества наблюдений $\{y_i, \mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$.

1.2 Что мы наблюдаем?

Мы рассмотрим три случая, отличающихся по тому, как наблюдается латентная эндогенная переменная y_i^* .

Случай 1: СЛУЧАЙ ДИСКРЕТНОГО ВЫБОРА. Мы наблюдаем \mathbf{x}_i и

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{для } y_i^* > 0 \Leftrightarrow -\varepsilon_i < \frac{\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \\ 0 & \text{для } y_i^* \leq 0 \Leftrightarrow -\varepsilon_i \geq \frac{\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

*Перевод С. Анатольева. Цитировать как: Бьорн, Эрик (2009) «Оценивание моделей дискретного выбора и моделей с цензурированием», Квантиль, №6, стр. 49–57. Citation: Bjørn, Erik (2009) “Estimation of discrete choice and censoring models,” Quantile, No.6, pp. 49–57.

[†]Адрес: Department of Economics, University of Oslo, P.O. Box 1095 Blindern, 0317 Oslo, Norway. Электронная почта: erik.bjorn@econ.uio.no

Формально, y_i – это ступенчатая функция от y_i^* , со ступенькой в нуле. Если мы в общем случае определим функцию $z = \mathbb{I}\{\mathcal{A}\}$, равную единице если событие \mathcal{A} верно и нулю если событие \mathcal{A} неверно, мы сможем записать (2) компактно как

$$y_i = \mathbb{I}\{y_i^* > 0\} = \mathbb{I}\{-\varepsilon_i < \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}/\sigma\}, \quad i = 1, \dots, N.$$

СЛУЧАЙ 2: СЛУЧАЙ С ЦЕНЗУРИРОВАНИЕМ. В этом Случае мы предполагаем, что знаем больше об y_i^* , чем в Случае 1. Мы наблюдаем \mathbf{x}_i и

$$y_i = \max\{y_i^*, 0\} = \begin{cases} y_i^* & \text{для } y_i^* > 0 \Leftrightarrow -\varepsilon_i < \frac{\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \\ 0 & \text{для } y_i^* \leq 0 \Leftrightarrow -\varepsilon_i \geq \frac{\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Особенность этого Случая в том, что y_i наблюдаема частично непрерывно (для $y_i^* = y_i > 0$), а частично дискретно (для $y_i^* \leq 0$, $y_i = 0$). Формально, y_i – непрерывная функция от y_i^* , с изломом в нуле. Наблюдения по y_i характеризуются нагромождением нулей.

СЛУЧАЙ 3: СЛУЧАЙ С ОТСЕЧЕНИЕМ. В этом Случае мы знаем меньше, чем в Случае 2, но больше, чем в Случае 1, только если наблюдается положительное y_i . У нас нет наблюдений для всех N значений i . Наблюдения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (y_i, \mathbf{x}_i) = (y_i^*, \mathbf{x}_i) \text{ и наблюдаема,} & \quad \text{если } y_i^* > 0 \Leftrightarrow -\varepsilon_i < \frac{\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \\ (y_i, \mathbf{x}_i) \text{ ненаблюдаема,} & \quad \text{если } y_i^* \leq 0 \Leftrightarrow -\varepsilon_i \geq \frac{\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

В этом Случае процесс, определяющий, будут ли у нас наблюдения для конкретного значения i или нет, случаен, и этот выбор есть результат решений респондентов, определяемых рассматриваемой моделью, (1).

1.3 Вероятностная структура откликов в Случаях 1 и 2

СЛУЧАЙ 1: МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОГО ВЫБОРА

Точечные вероятности двух возможных исходов для y_i , условно на \mathbf{x}_i , равны

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{y_i = 1 \mid \mathbf{x}_i\} &= \mathbb{P}\left\{-\varepsilon_i < \frac{\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma} \mid \mathbf{x}_i\right\} = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \equiv \mathcal{L}_{1i} \\ \mathbb{P}\{y_i = 0 \mid \mathbf{x}_i\} &= \mathbb{P}\left\{-\varepsilon_i \geq \frac{\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma} \mid \mathbf{x}_i\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \equiv \mathcal{L}_{0i}, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

где $\Phi(\cdot)$ – КФР (кумулятивная функция распределения) распределения $N(0, 1)$, \equiv следует интерпретировать как равенство по определению, и где первый индекс у функций \mathcal{L} обозначает «Режим 1» когда $y_i = 1$, и «Режим 0» когда $y_i = 0$, соответственно. (Заметим, что мы здесь используем тот факт, что $-\varepsilon_i$ и ε_i имеют одну и ту же функцию плотности, поскольку нормальное распределение симметрично.)

Часть функции правдоподобия, «относящуюся» к наблюдению i , можно переписать как

$$\mathcal{L}_i \equiv \mathcal{L}_{1i}^{y_i} \mathcal{L}_{0i}^{1-y_i} \equiv \begin{cases} \mathcal{L}_{1i} & \text{для } y_i = 1, \\ \mathcal{L}_{0i} & \text{для } y_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

СЛУЧАЙ 2: РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ С ЦЕНЗУРИРОВАНИЕМ

Рассмотрим вначале Режим 1, в котором y_i непрерывна и имеет ту же КФР, что и y_i^* :

$$\Phi\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y_i^* - \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (7)$$

и плотность, выводимую дифференцированием (7) по y_i для $y_i > 0$:

$$\frac{1}{\sigma} \phi \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} \phi \left(\frac{y_i^* - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \equiv \mathcal{M}_{1i}, \quad (8)$$

где $\phi(\cdot) \equiv \Phi'(\cdot)$.

Рассмотрим теперь Режим 0, в котором y_i наблюдается дискретно. Этот Режим совпадает с откликом $y_i = 0$ в Случае 1. Тогда у y_i нет плотности, а есть вероятностная масса, которую можно получить из КФР y_i^* следующим образом (см. вторую часть (5)):

$$\mathbb{P}\{y_i = 0 \mid \mathbf{x}_i\} = \mathbb{P}\{y_i^* \leq 0 \mid \mathbf{x}_i\} = \mathbb{P}\left\{-\varepsilon_i \geq \frac{\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \mid \mathbf{x}_i\right\} = 1 - \Phi \left(\frac{\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \equiv \mathcal{M}_{1i}. \quad (9)$$

Часть функции правдоподобия, «относящаяся» к наблюдению i , теперь выглядит как

$$\mathcal{M}_i \equiv \begin{cases} \mathcal{M}_{1i} & \text{для } y_i > 0, \\ \mathcal{M}_{0i} & \text{для } y_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Эта функция, таким образом, является смесью функций плотности и КФР.

1.4 Задача максимизации правдоподобия в Случаях 1 и 2

СЛУЧАЙ 1: МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОГО ВЫБОРА

Поскольку наши N наблюдений независимы, полная функция правдоподобия является произведением функций правдоподобия в (6) для всех наблюдений, что дает

$$\mathcal{L} \equiv \prod_{i=1}^N \mathcal{L}_i \equiv \prod_{i:y_i=1} \mathcal{L}_{1i} \prod_{i:y_i=0} \mathcal{L}_{0i}. \quad (11)$$

Максимизируя \mathcal{L} , или, что несколько проще, максимизируя

$$\ln(\mathcal{L}) \equiv \sum_{i=1}^N \ln(\mathcal{L}_i) = \sum_{i:y_i=1} \ln(\mathcal{L}_{1i}) + \sum_{i:y_i=0} \ln(\mathcal{L}_{0i}) \equiv H \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right)$$

по $\boldsymbol{\beta}/\sigma$, получаем оценки максимального правдоподобия этих параметров. Эту задачу приходится решать численно.

Решение данной максимизиционной задачи подразумевает интегрирование: КФР распределения $\mathbf{N}(0, 1)$, $\Phi(\cdot)$, определяется как некий интеграл. Заметим, что *мы не можем оценить уровень вектора коэффициентов $\boldsymbol{\beta}$, а можем лишь отношение этого вектора к стандартному отклонению возмущения в (1)*. Интерпретация: можно измерить (идентифицировать) лишь отклик на переменные в \mathbf{x}_i в «единицах стандартного отклонения». Это следствие того, что наблюдаемы лишь качественные свойства y_i^* .

СЛУЧАЙ 2: РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ С ЦЕНЗУРИРОВАНИЕМ

Поскольку наши N наблюдений независимы, полная функция правдоподобия является произведением функций правдоподобия в (10) для всех наблюдений, что дает

$$\mathcal{M} \equiv \prod_{i=1}^N \mathcal{M}_i = \prod_{i:y_i>0} \mathcal{M}_{1i} \prod_{i:y_i=0} \mathcal{M}_{0i}. \quad (12)$$

Максимизируя \mathcal{M} , или, что несколько проще, максимизируя

$$\ln(\mathcal{M}) \equiv \sum_{i=1}^N \ln(\mathcal{M}_i) = \sum_{i:y_i>0} \ln(\mathcal{M}_{1i}) + \sum_{i:y_i=0} \ln(\mathcal{M}_{0i}) \equiv G(\boldsymbol{\beta}, \sigma)$$

по (β, σ) , получаем оценки максимального правдоподобия этих параметров.

Еще раз отметим, что решение подразумевает интегрирование: КФР $N(0, 1)$ -распределения, $\Phi(\cdot)$, реализующегося в Режиме 0, определяется как некий интеграл. В данном случае мы уже можем оценить абсолютное значение вектора коэффициентов β вместе с параметром σ . Это происходит благодаря тому, что, в отличие от полностью дискретного Случая 1, y_i^* на некотором отрезке наблюдаема как количественная (непрерывная) переменная. Этого достаточно для раздельной идентификации β и σ .

2 Первое расширение: модель из двух уравнений

Следующая модель, которую мы рассмотрим, состоит из двух уравнений в форме (1):

$$\begin{aligned} y_{1i}^* &= \mathbf{x}_{1i}\beta_1 + \sigma_1\varepsilon_{1i}, \\ y_{2i}^* &= \mathbf{x}_{2i}\beta_2 + \sigma_2\varepsilon_{2i}, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{1i} \\ \varepsilon_{2i} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} y_{1i} &= \begin{cases} y_{1i}^* & \text{если } y_{1i}^* > 0, \\ 0 & \text{если } y_{1i}^* \leq 0, \end{cases} \\ y_{2i} &= \begin{cases} y_{2i}^* & \text{если } y_{1i}^* > 0, \\ 0 & \text{если } y_{1i}^* \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

где (y_{1i}, y_{2i}) цензурированы в нуле в зависимости от знака y_{1i}^* : строго положительные значения (y_{1i}, y_{2i}) наблюдаемы только если $y_{1i} > 0$.

Из (13)–(14) находим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y_{1i} | y_{1i} > 0) &= \mathbf{x}_{1i}\beta_1 - \sigma_1 \mathbb{E}[-\varepsilon_{1i} | -\varepsilon_{1i} < \mathbf{x}_{1i}(\beta_1/\sigma_1)] \\ &\equiv \mathbf{x}_{1i}\beta_1 - \sigma_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{1i} | \varepsilon_{1i} < \mathbf{x}_{1i}(\beta_1/\sigma_1)], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y_{2i} | y_{1i} > 0) &= \mathbf{x}_{2i}\beta_2 - \sigma_2 \mathbb{E}[-\varepsilon_{2i} | -\varepsilon_{2i} < \mathbf{x}_{1i}(\beta_1/\sigma_1)] \\ &\equiv \mathbf{x}_{2i}\beta_2 - \sigma_2 \mathbb{E}[\varepsilon_{2i} | \varepsilon_{1i} < \mathbf{x}_{1i}(\beta_1/\sigma_1)], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y_{2i} | y_{1i} = 0) &= \mathbf{x}_{2i}\beta_2 - \sigma_2 \mathbb{E}[-\varepsilon_{2i} | -\varepsilon_{2i} > \mathbf{x}_{1i}(\beta_1/\sigma_1)] \\ &\equiv \mathbf{x}_{2i}\beta_2 - \sigma_2 \mathbb{E}[\varepsilon_{2i} | \varepsilon_{1i} > \mathbf{x}_{1i}(\beta_1/\sigma_1)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку предположение о нормальности в (13) влечет за собой

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{ji} | \varepsilon_{ji} < a] = -\frac{\phi(a)}{\Phi(a)}, \quad \mathbb{E}[\varepsilon_{ji} | \varepsilon_{ji} > a] = \frac{\phi(a)}{1 - \Phi(a)}, \quad j = 1, 2; \quad a \in (-\infty, +\infty),$$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{ji} | \varepsilon_{ki}] = \rho \varepsilon_{ki}, \quad j, k = 1, 2; \quad j \neq k,$$

то из (15)–(17) следует в результате использования правила повторных ожиданий, что

$$\mathbb{E}(y_{1i} | y_{1i} > 0) = \mathbf{x}_{1i}\beta_1 + \sigma_1 \lambda_{Ai}, \quad (18)$$

$$\mathbb{E}(y_{2i} | y_{1i} > 0) = \mathbf{x}_{2i}\beta_2 + \rho \sigma_2 \lambda_{Ai}, \quad (19)$$

$$\mathbb{E}(y_{2i} | y_{1i} = 0) = \mathbf{x}_{2i}\beta_2 - \rho \sigma_2 \lambda_{Bi}, \quad (20)$$

где

$$\lambda_{Ai} = \frac{\phi\left(\frac{\mathbf{x}_{1i}\beta_1}{\sigma_1}\right)}{\Phi\left(\frac{\mathbf{x}_{1i}\beta_1}{\sigma_1}\right)}, \quad \lambda_{Bi} = \frac{\phi\left(\frac{\mathbf{x}_{1i}\beta_1}{\sigma_1}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_{1i}\beta_1}{\sigma_1}\right)}. \quad (21)$$

Теперь можно легко объяснить двухшаговую процедуру Хекмана.

Шаг 1: Провести пробит-анализ на первом уравнении (13), задействуя только знак y_{1i} как качественную переменную и наблюдаемые значения \mathbf{x}_{1i} . Это дает $\widehat{\beta}_1/\sigma_1$, откуда можно найти $\widehat{\lambda}_{Ai}$ и $\widehat{\lambda}_{Bi}$, используя (21).

Шаг 2:

(i) Для *нецензурированных* наблюдений, т.е. тех, для которых $y_{1i} > 0$, прорегрессировать y_{1i} на \mathbf{x}_{1i} и $\widehat{\lambda}_{Ai}$, используя (18). Это дает $(\widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}_1)$.

(ii) Для *нецензурированных* наблюдений, т.е. тех, для которых $y_{1i} > 0$, прорегрессировать y_{2i} на \mathbf{x}_{2i} и $\widehat{\lambda}_{Ai}$, используя (19). Это дает $(\widehat{\beta}_2, \widehat{\rho}\widehat{\sigma}_2)$. Или же для *цензурированных* наблюдений, т.е. тех, для которых $y_{1i} = 0$, прорегрессировать y_{2i} на \mathbf{x}_{2i} и $\widehat{\lambda}_{Bi}$, используя (20). Это дает $(\widehat{\beta}_2, \widehat{\rho}\widehat{\sigma}_2)$.

Обозначим через $f(u_{1i}, u_{2i}; \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ плотность возмущений $(u_{1i}, u_{2i}) = (\sigma_1\varepsilon_{1i}, \sigma_2\varepsilon_{2i})$ в (13). Если бы цензурирования не было, то $f(y_{1i} - \mathbf{x}_{1i}\beta_1, y_{2i} - \mathbf{x}_{2i}\beta_2; \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ была бы плотностью (y_{1i}, y_{2i}) (условно на $\mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i}$) на всей области (y_{1i}, y_{2i}) . Но (y_{1i}, y_{2i}) распределены не непрерывно на той области, где цензурирование действует. В этой ситуации правдоподобия для наблюдений выводятся следующим образом.

Обозначим через \mathcal{M}_i часть функции правдоподобия, относящуюся к наблюдению i . Имеем: $\mathcal{M}_i = f(y_{1i} - \mathbf{x}_{1i}\beta_1, y_{2i} - \mathbf{x}_{2i}\beta_2; \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ для наблюдений с $y_{1i} > 0$ и $\mathcal{M}_i = \mathbb{P}\{y_{1i}^* \leq 0\} = \mathbb{P}\{-\varepsilon_{1i} > \mathbf{x}_{1i}\beta_1/\sigma_1\} = 1 - \Phi(\mathbf{x}_{1i}\beta_1/\sigma_1)$ для наблюдений с $y_{1i} = 0$.

В предположении о независимости наблюдений все это вместе означает, что полная функция правдоподобия имеет вид

$$\mathcal{M} = \prod_{i:y_{1i}>0} f(y_{1i} - \mathbf{x}_{1i}\beta_1, y_{2i} - \mathbf{x}_{2i}\beta_2; \sigma_1, \sigma_2, \rho) \prod_{i:y_{1i}=0} \left[1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_{1i}\beta_1}{\sigma_1}\right) \right], \quad (22)$$

где $\prod_{i:y_{1i}>0}$ и $\prod_{i:y_{1i}=0}$ символизируют произведения по тем значениям i , для которых $y_{1i} > 0$, и по тем значениям i , для которых $y_{1i} = 0$, соответственно. Максимизация \mathcal{M} по неизвестным параметрам дает оценки максимального правдоподобия.

3 Второе расширение: панельные данные

3.1 Отправная точка

Отправной точкой при расширении модели первого раздела на случай (сбалансированных) панельных данных является следующее уравнение:

$$y_{it}^* = \mathbf{x}_{it}\beta + \alpha_i + \sigma\varepsilon_{it}, \quad \varepsilon_{it} \sim \text{IIN}(0, 1), \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \quad (23)$$

Мы, правда, не наблюдаем $(y_{it}^*, \mathbf{x}_{it})$ для всех (i, t) . Предполагается, что α_i – латентный индивидуальный эффект, который можно рассматривать как фиксированный и полностью неизвестный и неструктурированный, или же как случайный и порожденный распределением вероятностей с определенными свойствами. Мы будем придерживаться его интерпретации как случайного эффекта, хотя в определенных местах и будем действовать условно на α_i , что можно рассматривать как подражание случаю с фиксированными эффектами. Нашей целью является несмещенная инференция о β , т.е., об эффекте изменений в \mathbf{x}_{it} на y_{it}^* , исходя из множества наблюдений $\{\{y_{it}, \mathbf{x}_{it}\}_{i=1}^N\}_{t=1}^T$.

3.2 Что мы наблюдаем?

Мы рассмотрим три случая, отличающихся по тому, как наблюдается латентная эндогенная переменная y_{it}^* .

СЛУЧАЙ 1: СЛУЧАЙ ДИСКРЕТНОГО ВЫБОРА. Мы наблюдаем \mathbf{x}_{it} и

$$y_{it} = \begin{cases} 1 & \text{для } y_{it}^* > 0 \Leftrightarrow -\varepsilon_{it} < \frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma}, \\ 0 & \text{для } y_{it}^* \leq 0 \Leftrightarrow -\varepsilon_{it} \geq \frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma}, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N, \\ t = 1, \dots, T, \end{matrix} \quad (24)$$

где i индексирует индивида, а t – период времени. Формально, y_{it} – это ступенчатая функция от y_{it}^* , со ступенькой в нуле. Можно записать (24) компактно как

$$y_{it} = \mathbb{I}\{y_{it}^* > 0\} = \mathbb{I}\{-\varepsilon_{it} < (\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i)/\sigma\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T.$$

СЛУЧАЙ 2: СЛУЧАЙ С ЦЕНЗУРИРОВАНИЕМ. В этом Случае мы знаем больше об y_{it}^* , чем в Случае 1. Мы наблюдаем \mathbf{x}_{it} и

$$y_{it} = \max\{y_{it}^*, 0\} = \begin{cases} y_{it}^* & \text{для } y_{it}^* > 0 \Leftrightarrow -\varepsilon_{it} < \frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma}, \\ 0 & \text{для } y_{it}^* \leq 0 \Leftrightarrow -\varepsilon_{it} \geq \frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma}, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N, \\ t = 1, \dots, T. \end{matrix} \quad (25)$$

Особенность этого Случая в том, что y_{it} *наблюдается частично непрерывно* (для $y_{it}^* = y_{it} > 0$), а *частично дискретно* (для $y_{it}^* \leq 0$, $y_{it} = 0$). Формально, y_{it} – непрерывная функция от y_{it}^* , с изломом в нуле. Наблюдения по y_{it} характеризуются *нагромождением нулей*.

СЛУЧАЙ 3: СЛУЧАЙ С ОТСЕЧЕНИЕМ. В этом Случае мы знаем меньше, чем в Случае 2, но больше, чем в Случае 1, только для тех индивидов в те периоды времени, когда они ответили положительно. У нас нет наблюдений для всех NT комбинаций (i, t) . Наблюдения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (y_{it}, \mathbf{x}_{it}) &= (y_{it}^*, \mathbf{x}_{it}) \text{ и наблюдаема,} & \text{если } y_{it}^* > 0 & \Leftrightarrow -\varepsilon_{it} < \frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma}, & i = 1, \dots, N, \\ (y_{it}, \mathbf{x}_{it}) &\text{ ненаблюдаема,} & \text{если } y_{it}^* \leq 0 & \Leftrightarrow -\varepsilon_{it} \geq \frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma}, & t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

В этом Случае процесс, определяющий, будут ли у нас наблюдения для конкретных комбинаций (i, t) или нет, случаен, и *этот выбор есть результат индивидуальных решений респондентов, определяемых рассматриваемой моделью*, (1). Выборка представляет собой набор несбалансированных панельных данных, и *вид несбалансированности определяется эндогенно*.

3.3 Вероятностная структура откликов в Случаях 1 и 2

СЛУЧАЙ 1: МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОГО ВЫБОРА

Точечные вероятности двух возможных исходов для y_{it} , условно не только на \mathbf{x}_{it} , но также на индивидуальном эффекте α_i , равны

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{y_{it} = 1 \mid \mathbf{x}_{it}, \alpha_i\} &= \mathbb{P}\left\{-\varepsilon_{it} < \frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma} \mid \mathbf{x}_{it}, \alpha_i\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma}\right) \equiv \mathcal{L}_{1it}(\alpha_i), \\ \mathbb{P}\{y_{it} = 0 \mid \mathbf{x}_{it}, \alpha_i\} &= \mathbb{P}\left\{-\varepsilon_{it} \geq \frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma} \mid \mathbf{x}_{it}, \alpha_i\right\} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma}\right) \equiv \mathcal{L}_{0it}(\alpha_i), \end{aligned} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N, \\ t = 1, \dots, T. \end{matrix} \quad (26)$$

Вновь первый индекс у функций \mathcal{L} обозначает «Режим 1» когда $y_{it} = 1$, и «Режим 0» когда $y_{it} = 0$, соответственно.

Согласно определению имеем

$$\mathcal{L}_{it}(\alpha_i) \equiv \mathcal{L}_{1it}(\alpha_i)^{y_{it}} \mathcal{L}_{0it}(\alpha_i)^{1-y_{it}} \equiv \begin{cases} \mathcal{L}_{1it}(\alpha_i) & \text{для } y_{it} = 1, \quad i=1, \dots, N, \\ \mathcal{L}_{0it}(\alpha_i) & \text{для } y_{it} = 0, \quad t=1, \dots, T. \end{cases} \quad (27)$$

Часть функции правдоподобия, «относящаяся» к индивиду i , условную на α_i , можно переписать из-за независимости y_{i1}, \dots, y_{iT} ввиду (23) как

$$\mathcal{L}_i(\alpha_i) \equiv \prod_{t=1}^T \mathcal{L}_{1it}(\alpha_i)^{y_{it}} \mathcal{L}_{0it}(\alpha_i)^{1-y_{it}} \equiv \prod_{t:y_{it}=1} \mathcal{L}_{1it}(\alpha_i) \prod_{t:y_{it}=0} \mathcal{L}_{0it}(\alpha_i). \quad (28)$$

Здесь $t : y_{it} = 1$ и $t : y_{it} = 0$ внизу оператора взятия произведения \prod означают, для индивиду i , взятие произведений по всем t таким, что $y_{it} = 1$, и по всем t таким, что $y_{it} = 0$, соответственно.

Соответствующая часть *маржинальной* функции правдоподобия выводится следующим образом. Предположим, что α_i имеет функцию плотности $g(\alpha_i; \gamma)$, где γ – вектор неизвестных параметров, включающий среднее и стандартное отклонение. Тогда маржинальным аналогом (28) является

$$\mathcal{L}_i^* \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_i(\alpha_i) g(\alpha_i; \gamma) d\alpha_i \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{t:y_{it}=1} \mathcal{L}_{1it}(\alpha_i) \prod_{t:y_{it}=0} \mathcal{L}_{0it}(\alpha_i) \right] g(\alpha_i; \gamma) d\alpha_i. \quad (29)$$

СЛУЧАЙ 2: РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ С ЦЕНЗУРИРОВАНИЕМ

Рассмотрим вначале Режим 1, в котором y_{it} непрерывна и имеет ту же КФР, что и у y_{it}^* :

$$\Phi\left(\frac{y_{it} - \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} - \alpha_i}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y_{it}^* - \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} - \alpha_i}{\sigma}\right) \quad (30)$$

и плотность, выводимую дифференцированием (30) по y_{it} для $y_{it} > 0$:

$$\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_{it} - \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} - \alpha_i}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_{it}^* - \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} - \alpha_i}{\sigma}\right) \equiv \mathcal{M}_{1it}(\alpha_i). \quad (31)$$

Рассмотрим теперь Режим 0, в котором y_{it} наблюдается дискретно. Этот Режим совпадает с откликом $y_{it} = 0$ в Случае 1. Тогда у y_{it} нет плотности, а есть вероятностная масса, которую можно получить из КФР y_{it}^* следующим образом (см. вторую часть (26)):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{y_{it} = 0 \mid \mathbf{x}_{it}, \alpha_i\} &= \mathbb{P}\{y_{it}^* \leq 0 \mid \mathbf{x}_{it}, \alpha_i\} = \mathbb{P}\left\{-\varepsilon_{it} \geq \frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma} \mid \mathbf{x}_{it}, \alpha_i\right\} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i}{\sigma}\right) \equiv \mathcal{M}_{1it}(\alpha_i) \end{aligned} \quad (32)$$

Часть функции правдоподобия, «относящаяся» к индивиду i , условную на α_i , можно переписать из-за независимости y_{i1}, \dots, y_{iT} ввиду (23) как

$$\mathcal{M}_i(\alpha_i) \equiv \prod_{t:y_{it}>0} \mathcal{M}_{1it}(\alpha_i) \prod_{t:y_{it}=0} \mathcal{M}_{0it}(\alpha_i). \quad (33)$$

Эта функция правдоподобия для конкретного индивиду, таким образом, является смесью функций плотности и КФР. Здесь $t : y_{it} > 0$ и $t : y_{it} = 0$ внизу оператора взятия произведения \prod означают, для индивиду i , взятие произведений по всем t таким, что $y_{it} > 0$, и по всем t таким, что $y_{it} = 0$, соответственно.

Соответствующая часть *маржинальной* функции правдоподобия выводится следующим образом. Предположим, что α_i имеет функцию плотности $g(\alpha_i; \gamma)$, где γ – вектор неизвестных параметров, включающий среднее и стандартное отклонение. Тогда маржинальный аналог (34) выводится интегрированием (27) по области определения α_i :

$$\mathcal{M}_i^* \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}_i(\alpha_i) g(\alpha_i; \gamma) d\alpha_i \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{t:y_{it}>0} \mathcal{M}_{1it}(\alpha_i) \prod_{t:y_{it}=0} \mathcal{M}_{0it}(\alpha_i) \right] g(\alpha_i; \gamma) d\alpha_i. \quad (34)$$

3.4 Задача максимизации правдоподобия в Случаях 1 и 2

СЛУЧАЙ 1: МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОГО ВЫБОРА

Поскольку N индивидов наблюдаются независимо, функция правдоподобия является произведением индивидуальных функций правдоподобия в (29), что дает

$$\mathcal{L}^* \equiv \prod_{i=1}^N \mathcal{L}_i^* = \prod_{i=1}^N \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{t:y_{it}=1} \mathcal{L}_{1it}(\alpha_i) \prod_{t:y_{it}=0} \mathcal{L}_{0it}(\alpha_i) \right) g(\alpha_i; \gamma) d\alpha_i \right]. \quad (35)$$

Максимизируя \mathcal{L}^* , или, что несколько проще, максимизируя

$$\ln(\mathcal{L}^*) = \sum_{i=1}^N \ln \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{t:y_{it}=1} \mathcal{L}_{1it}(\alpha_i) \prod_{t:y_{it}=0} \mathcal{L}_{0it}(\alpha_i) \right) g(\alpha_i; \gamma) d\alpha_i \right] \equiv H \left(\frac{\beta}{\sigma}, \gamma \right)$$

по $(\beta/\sigma, \gamma)$, получаем оценки максимального правдоподобия этих параметров. Эту задачу приходится решать численно. Заметим, что поскольку интегрирование – это что-то типа суммирования, нельзя переместить \ln -оператор под интеграл!

Решение данной максимизационной задачи подразумевает интегрирование в двух местах. Во-первых, (логарифмическая) функция правдоподобия содержит интегрирование по отношению к случайному индивидуальному эффекту α_i . Во-вторых, КФР $\Phi(\cdot)$ определяется как некий интеграл. Заметим, что *мы не можем оценить уровень вектора коэффициентов β , а можем лишь отношение этого вектора к стандартному отклонению возмущения v* (23). Интерпретация: можно измерить (идентифицировать) лишь отклик на переменные в \mathbf{x}_{it} в «единицах стандартного отклонения». Это следствие того, что наблюдаемы лишь качественные свойства y_{it}^* .

СЛУЧАЙ 2: РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ С ЦЕНЗУРИРОВАНИЕМ

Поскольку N индивидов наблюдаются независимо, функция правдоподобия является произведением индивидуальных функций правдоподобия в (34), что дает

$$\mathcal{M}^* \equiv \prod_{i=1}^N \mathcal{M}_i^* = \prod_{i=1}^N \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{t:y_{it}>0} \mathcal{M}_{1it}(\alpha_i) \prod_{t:y_{it}=0} \mathcal{M}_{0it}(\alpha_i) \right) g(\alpha_i; \gamma) d\alpha_i \right]. \quad (36)$$

Максимизируя \mathcal{M}^* , или, что несколько проще, максимизируя

$$\ln(\mathcal{M}^*) = \sum_{i=1}^N \ln \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{t:y_{it}>0} \mathcal{M}_{1it}(\alpha_i) \prod_{t:y_{it}=0} \mathcal{M}_{0it}(\alpha_i) \right) g(\alpha_i; \gamma) d\alpha_i \right] \equiv G(\beta, \sigma, \gamma)$$

по (β, σ, γ) , получаем оценки максимального правдоподобия этих параметров.

И вновь решение подразумевает интегрирование в двух местах. Во-первых, (логарифмическая) функция правдоподобия содержит интегрирование по отношению к случайному индивидуальному эффекту α_i . Во-вторых, КФР $\Phi(\cdot)$, реализующегося в Режиме 0, определяется

как некий интеграл. В данном случае мы уже можем оценить абсолютное значение вектора коэффициентов β вместе с σ и γ . Это происходит благодаря тому, что, в отличие от полностью дискретного Случая 1, y_{it}^* на некотором отрезке наблюдаема как количественная (непрерывная) переменная. Этого достаточно для отдельной идентификации β и σ .

Estimation of discrete choice and censoring models

Erik Bjørn

University of Oslo, Oslo, Norway

This expository note gives an overview of model specifications, likelihood functions and a structure of maximum likelihood problems for discrete choice and censoring models. One part deals with estimation in a single equation case with unidimensional (cross-sectional) observations. Another part extends the framework to a two-equation case. The last part is concerned with an extension to a panel data situation.

