

Задачи и решения

Задачи

Задача 6.1

Рассмотрим линейную модель, где среди регрессоров присутствует линейный тренд:

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t,$$

и где ε_t независимы и одинаково распределены согласно некоторому распределению \mathcal{D} с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Объектом интереса является β .

1. Выпишите МНК-оценку β (назовем ее $\hat{\beta}$) в форме отклонений и найдите ее асимптотическое распределение.
2. Исследователь предлагает избавиться от тренда в регрессорах с помощью взятия первых разностей:

$$y_t - y_{t-1} = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

с последующим оцениванием β с помощью МНК. Выпишите эту оценку (назовем ее $\check{\beta}$) и найдите ее асимптотическое распределение.

3. Сравните оценки $\hat{\beta}$ и $\check{\beta}$ по асимптотической эффективности.

Задача 6.2

Пусть асимптотическое смещение второго порядка некоторой состоятельной асимптотически нормальной (с асимптотической дисперсией $V_{\hat{\theta}}$) оценки $\hat{\theta}$ скалярного параметра θ равно $B_{\hat{\theta}}$. Выведите асимптотическое смещение второго порядка для $g(\hat{\theta})$ как оценки $g(\theta)$, где $g(\cdot)$ – гладкая нелинейная функция.

Задача 6.3

Рассмотрим регрессию в матричной форме

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}\beta + \mathcal{E},$$

где регрессоры \mathcal{X} коррелируют с ошибками \mathcal{E} , но эта корреляция слаба. Рассмотрим разложение \mathcal{E} на проекцию на \mathcal{X} и ей ортогональную компоненту \mathcal{U} :

$$\mathcal{E} = \mathcal{X}\pi + \mathcal{U}.$$

Предположим, что $(n^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{X}, n^{-1/2}\mathcal{X}'\mathcal{U}) \xrightarrow{p} (Q, \xi)$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2 Q)$, и матрица Q полного ранга. Покажите, что в предположении о дрейфующем параметре $\pi = c/\sqrt{n}$, где n – размер выборки, а c фиксировано, МНК-оценка для β состоятельна и асимптотически нецентрировано нормальна, и выведите асимптотическое распределение статистика Вальда для тестирования системы линейных ограничений $R\beta = r$, где R имеет полный ранг q .