Статьи: эконометрическая теория

Смещение второго порядка в статистике, оценивающей качество прогнозов*

Виктор Китов†

Московский государственный университет, Москва, Россия

В статье выводится асимптотическое смещение второго порядка для статистики, оценивающей качество вневыборочных прогнозов параметрических моделей. В предыдущих исследованиях признавалось, что качество асимптотической аппроксимации первого порядка может оказаться неудовлетворительным. Найденное в данной статье асимптотическое смещение второго порядка позволяет во многом объяснить причину недостаточной точности асимптотической аппроксимации. Симуляции подтверждают полученные аналитические результаты.
Ключевые слова: критерии качества прогнозов, сравнение моделей, оценивание параметров, асимптотическое смещение второго порядка, проверка гипотез
Классификация JEL: C22, C52, C53

1 Введение

В данной работе рассматривается задача оценивания качества вневыборочных прогнозов. Пусть имеется выборка из наблюдений $z_1, z_2, \ldots, z_T$, где $z_t = (x_t, y_t) \in \mathbb{R}^{\mathtt{1x(n+1)}}$, $x_t \in \mathbb{R}^{\mathtt{1xn}}$, $y_t \in \mathbb{R}$, $t = 1, 2, \ldots, T$, которая подчиняется модели $y_t = g(x_t, \theta) + \varepsilon_t$, где θ – вектор неизвестных параметров, оцениваемый по располагаемой выборке. Качество прогнозов модели определяется математическим ожиданием $\mathbb{E}[f_t]$ некоторой функции $f_t = f(x_t, y_t, \theta)$. Типичными примерами функции f_t являются $\varepsilon_t, \varepsilon_t^2$ и ε_t^2/y_t^2, когда оценивается среднее ошибок прогнозов, среднее квадратов ошибок прогнозов и относительное среднее квадратов ошибок прогнозов. Другими примерами критерия качества прогнозов могут быть серийная ковариация ошибок прогнозов или ковариация ошибок прогнозов с прогнозом, полученным при помощи другой модели. Точечные оценки качества прогнозов обычно строятся с использованием выборочного аналога математического ожидания

$$\frac{1}{P}\sum_{t=R}^{T-1} f\left(x_{t+1}, y_{t+1}, \hat{\theta}_t\right) = \frac{1}{P}\sum_{t=R}^{T-1} \hat{f}_{t+1},$$

где параметр R выбирается исследователем, $P = T - R$, а $\hat{\theta}_t$ обозначает оценку неизвестного параметра θ. Для тестирования гипотез требуется знать асимптотическое распределение оценки качества прогнозов, которое будет зависеть от методики оценки вектора неизвестных параметров. В работах West (1996) и West & McCracken (1998) выводится (см. также Clements, 2005 и Маккракен, 2006) асимптотическое распределение первого порядка величины

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(\hat{f}_{t+1} - \mathbb{E}[f_t]\right),$$

*Цитировать как: Китов, Виктор (2009). «Смещение второго порядка в статистике, оценивающей качество прогнозов», Квантиль, №6, стр. 77–91. Citation: Kitov, Victor (2009). “Second order bias in a forecast evaluation statistic,” Quantile, No.6, pp. 77–91.
†Адрес: 119992, Россия, г. Москва, Воробьевы горы. Электронная почта: *vkitov@mail.ru*

которое является нормальным с нулевым средним.

Однако статистические испытания, приводимые авторами, свидетельствуют о неточности полученного асимптотического распределения, что выражается в отклонении фактической значимости тестов от теоретической. Величина данного отклонения зависит от метода оценивания вектора неизвестных параметров. В случае, когда все предыдущие наблюдения участвуют в оценивании неизвестных параметров (метод расширяющегося окна), отклонения в значимости тестов небольшие. Однако когда для оценивания параметров используется фиксированное число предшествующих моменту прогноза наблюдений (метод скользящего окна), отклонения в значимости тестов являются существенными, и они тем больше, чем больше отношение P/R.

В качестве решения проблемы неточной аппроксимации асимптотического распределения первого порядка в данной работе выводится асимптотическое разложение второго порядка для статистики качества прогнозов. В качестве метода оценивания параметров модели используется экстремальное оценивание общего вида, которое включает нелинейный метод наименьший квадратов и метод максимального правдоподобия как частные случаи. Учет асимптотического смещения второго порядка позволяет существенно повысить точность асимптотической аппроксимации распределения статистики, оценивающей качество прогнозов, особенно в случае оценивания θ методом скользящего окна. В работе приводятся статистические испытания, иллюстрирующие полученные аналитические результаты на численных примерах.

2 Постановка задачи

Рассматривается выборка наблюдений $z_1, z_2, \ldots, z_T$, где $z_t \in \mathbb{R}^{\mathtt{1x(n+1)}}$, $t = 1, 2, \ldots, T$, полученная с помощью некоторого строго стационарного и эргодического случайного процесса, и порождаемое данным случайным процессом вероятностное пространство с борелевской сигма-алгеброй. Каждое наблюдение делится на вектор регрессоров $x_t \in \mathbb{R}^{\mathtt{1xn}}$ и зависимую скалярную переменную y_t, так что $z_t = (x_t, y_t)$. Зависимость в данных описывается моделью

$$y_t = g(x_t, \theta) + \varepsilon_t,$$

где $\theta = \left(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m\right)'$ – вектор неизвестных параметров, оцениваемый по располагаемой выборке.

Целью исследования является построение статистических выводов о математическом ожидании $\mathbb{E}[f_t] \in \mathbb{R}$, где $f_t = f(x_t, y_t, \theta)$ – это некоторая функция, определяющая качество прогнозов. Для этого выбирается параметр R. Затем последовательно строятся прогнозы зависимой переменной y_t для моментов времени $t = R+1, R+2, \ldots, T$ с использованием модели $y_{t+1} = g(x_{t+1}, \hat{\theta}_t)$, где $\hat{\theta}_t$ оценивается двумя возможными способами: методом расширяющегося окна, в котором учитываются все предшествующие наблюдения $z_1, z_2, \ldots, z_t$, либо методом скользящего окна, где используются R последних наблюдений $z_{t-R+1}, z_{t-R+2}, \ldots, z_t$. Предполагается, что параметр θ удовлетворяет условию экстремального оценивания общего вида:

$$\theta = \arg\max_{q\in\Theta} \mathbb{E}\left[\psi(z, q)\right]$$

с некоторой функцией ψ. Оценка находится из равенства

$$\hat{\theta}_t = \arg\max_{q\in\Theta} \hat{\mathbb{E}}_t\left[\psi(z, q)\right],$$

где $\hat{\mathbb{E}}_t$ – оператор выборочного среднего. Экстремальное оценивание включает в себя нелинейный метод наименьших квадратов при $\psi(z, q) = -\left(y - g(x, q)\right)^2$ и метод максимального правдоподобия при $\psi(z,q) = \ln p(y|x,q)$, где $p(y|x,q)$ – функция плотности условного распределения.

Введем обозначения:

$$J = \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\psi(z_t,\theta)}{\partial q \partial q'}\right],\ K = \mathbb{E}\left[\frac{\partial^3\psi(z_t,\theta)}{\partial q^3}\right],\ h_\tau = \frac{\partial\psi(z_\tau,\theta)}{\partial q},\ m_\tau = \frac{\partial^2\psi(z_\tau,\theta)}{\partial q \partial q'} - J$$

и $B = -J^{-1}$. В лемме 1, приведенной в приложении, выводится разложение второго порядка для оценки, полученной с помощью метода экстремального оценивания. В случае расширяющегося окна разложение имеет вид

$$\hat\theta_t - \theta = B\frac{1}{\sqrt{t}}H_t + \frac{1}{t}BM_tBH_t + \frac{1}{2}\frac{1}{t}BH_t'BKBH_t + O_p\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right), \tag{1}$$

где

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t} h_\tau, \quad M_t = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t} m_\tau.$$

В случае скользящего окна

$$\hat\theta_t - \theta = B\frac{1}{\sqrt{R}}H_t + \frac{1}{R}BM_tBH_t + \frac{1}{2}\frac{1}{R}BH_t'BKBH_t + O_p\left(\frac{1}{R\sqrt{R}}\right), \tag{2}$$

где

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{R}}\sum_{\tau=t-R+1}^{t} h_\tau, \quad M_t = \frac{1}{\sqrt{R}}\sum_{\tau=t-R+1}^{t} m_\tau.$$

Для построения статистических выводов относительно величины $\mathbb{E}[f_t]$ строится статистика качества прогнозов

$$\hat V = \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(f_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}, \hat\theta_t) - \mathbb{E}[f_t]\right).$$

Рассматривается асимптотический переход, в котором при $T \to \infty$ значения $R \to \infty$ и $P \to \infty$, причем $P/R = \pi + o(1/\sqrt{R}),\quad 0 < \pi < \infty$.

Для краткости будут использоваться следующие обозначения:

- $\sup_t$ обозначает $\sup_{R \le t \le T-1}$: $f_{t+1} = f(x_{t+1}, y_{t+1}, \theta)$, $\hat f_{t+1} = f(x_{t+1}, y_{t+1}, \hat\theta_t)$.
- Модуль матрицы $|U|$ обозначает матрицу A, такую что $\{A\}_{i,j} = |\{U\}_{i,j}|$.
- Для матрицы $K \in \mathbb{R}^{\mathtt{mxmxm}}$, имеющей три измерения, и вектора $b \in \mathbb{R}^{\mathtt{mx1}}$ матричная операция $b'Kb$ обозначает вектор размерности $m \times 1$ с элементами

$$\{b'Kb\}_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} b_j b_k K_{i,j,k}.$$

- Оператор $\mathrm{vec}[\cdot]$ обозначает операцию векторизации. Для матрицы $A \in \mathbb{R}^{\mathtt{mxn}}$, где $a_{ij} = A_{i,j}$, $\mathrm{vec}[A] = [a_{11}, a_{21}, \ldots a_{m1}, a_{12}, a_{22}, \ldots a_{m2}, \cdots, a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{mn}]$.
- Операция $\otimes$ обозначает кронекерово произведение.

Далее,

$$\frac{\partial f_{t+1}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial f_{t+1}}{\partial \theta^1}, \frac{\partial f_{t+1}}{\partial \theta^2}, \dots \frac{\partial f_{t+1}}{\partial \theta^m}\right) \in \mathbb{R}^{\mathtt{1xm}}, \quad \frac{\partial^2 f_{t+1}}{\partial \theta^2} = \left\{\frac{\partial^2 f_{t+1}}{\partial \theta^i \partial \theta^j}\right\}_{i,j} \in \mathbb{R}^{\mathtt{mxm}},$$

$$F = \mathbb{E}[f_t] \in \mathbb{R}, \quad F_1 = \mathbb{E}\left[\frac{\partial f_t}{\partial \theta}\right] \in \mathbb{R}^{\mathtt{1xm}}, \quad F_2 = \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 f_t}{\partial \theta^2}\right] \in \mathbb{R}^{\mathtt{mxm}},$$

$$G_t = \mathrm{vec}\left[\frac{\partial \psi\left(z_t, \theta\right)}{\partial q}; \frac{\partial^2 \psi\left(z_t, \theta\right)}{\partial q \partial q'}; \; f(z_t; \theta) - F; \; \frac{\partial f}{\partial \theta}\left(z_t; \theta\right) - F_1; \; \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\left(z_t; \theta\right) - F_2\right].$$

Предполагается, что для всех $u \in \Theta$ (Θ – компакт, содержащий значение θ) выполнены условия:
(1) Функция $f_t\left(u\right)$ измерима и трижды непрерывно дифференцируема по u.
(2) Для некоторого $\delta > 0 \quad \mathbb{E}\left[\left|\mathrm{vec}\left[\otimes_{i=1}^3 G_t\right]\right|^{2+\delta}\right] < \infty$.
(3) Процесс G_t является строго перемешивающим, т.е. для сигма-алгебр $S_a^b = \sigma\left\{G_a, \dots, G_b\right\}$ выполнено условие

$$\sup_{A \in S_{-\infty}^t, \; B \in S_{t+\tau}^{+\infty}} \left|\mathbb{P}\left(AB\right) - \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right)\right| = \alpha\left(\tau\right) \to 0 \text{ при } \tau \to \infty,$$

Дополнительно предполагается, что $\exists \tilde{C} : \alpha\left(\tau\right) \le \tilde{C}\tau^{-\omega}, \; \frac{\omega\delta}{2+\delta} > 2$.
(4) $\exists C_0 < \infty, t_0 > 0 : \forall t \ge t_0$

$$\sup_{\substack{\theta \in \Theta \\ 1 \le i,j,k \le m}} \left|\frac{\partial^3 f_{t+1}(u)}{\partial \theta^i \partial \theta^j \partial \theta^k}\right| < v_t,$$

где v_t – некоторая измеримая функция, для которой выполнено условие $\mathbb{E}[v_t] < C_0$.

В работе предполагаются выполненными также технические предположения, обеспечивающие состоятельность оценок вектора θ, приведенные в приложении.

3 Смещение второго порядка статистики качества прогнозов

Введем обозначения:

$$\Phi_{t+1}^1 = \left(\frac{\partial f_{t+1}}{\partial \theta} - F_1\right), \quad \Phi_{t+1}^2 = \left(\frac{\partial^2 f_{t+1}}{\partial \theta^2} - F_2\right), \quad \Gamma_j = \mathbb{E}\left[\Phi_t^1 B h_{t-j}\right],$$

$$\Omega_j = \mathbb{E}\left[m_t' B h_{t-j}\right], \quad \Lambda_j = \mathbb{E}\left[h_t' BKB h_{t-j}\right], \quad \Psi_j = \mathbb{E}\left[h_t B F_2 B h_{t-j}\right].$$

Указанные математические ожидания существуют согласно предположению 2 и неравенству Гельдера.

Теорема 1: При указанных выше предположениях смещение второго порядка для статистики, оценивающей качество прогнозов, равно

$$b_{st} = \frac{1}{\sqrt{P}}\lambda_B\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\Gamma_j + F_1 B\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Omega_j + \frac{1}{2}F_1 B\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Lambda_j + \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Psi_j\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),$$

где параметр λ_B равен $\ln\left(1+\pi\right)$ в случае расширяющегося окна и π в случае скользящего окна.

Доказательство: Рассмотрим случай расширяющегося окна. Применяя разложение Тэйлора второго порядка к каждой функции $\hat{f}_{t+1} = f(x_{t+1}, y_{t+1}, \hat{\theta}_t)$ и суммируя для моментов времени $R \le t \le T-1$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\hat{f}_{t+1} = \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1} f_{t+1} + \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\frac{\partial f_{t+1}}{\partial\theta}(\hat{\theta}_t-\theta) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}(\hat{\theta}_t-\theta)'\frac{\partial^2 f_{t+1}}{\partial\theta^2}(\hat{\theta}_t-\theta)$$

плюс остаток

$$\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\sum_{i,j,k=1}^{m}\frac{\partial^3 f(z_{t+1},\tilde{\theta}_t)}{\partial\theta^i\partial\theta^j\partial\theta^k}\left(\hat{\theta}_t^i-\theta^i\right)\left(\hat{\theta}_t^j-\theta^j\right)\left(\hat{\theta}_t^k-\theta^k\right).$$

Согласно лемме 2, остаток равен $o_p\left(1/\sqrt{R}\right)$, значит

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(\hat{f}_{t+1}-\mathbb{E}[f_{t+1}]\right) = \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}(f_{t+1}-\mathbb{E}[f_{t+1}]) + \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(\frac{\partial f_{t+1}}{\partial\theta}-F_1\right)(\hat{\theta}_t-\theta)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}F_1(\hat{\theta}_t-\theta) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}(\hat{\theta}_t-\theta)'\left(\frac{\partial^2 f_{t+1}}{\partial\theta^2}-F_2\right)(\hat{\theta}_t-\theta)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}(\hat{\theta}_t-\theta)'F_2(\hat{\theta}_t-\theta) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right).$$

Используя разложение (1), получим

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(\hat{f}_{t+1}-\mathbb{E}[f_{t+1}]\right) = \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}(f_{t+1}-\mathbb{E}[f_{t+1}]) + \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\Phi_{t+1}^1(\hat{\theta}_t-\theta)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}F_1(\hat{\theta}_t-\theta) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}(\hat{\theta}_t-\theta)'\Phi_{t+1}^2(\hat{\theta}_t-\theta)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}(\hat{\theta}_t-\theta)'F_2(\hat{\theta}_t-\theta) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) = \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}(f_{t+1}-\mathbb{E}[f_{t+1}])$$

$$+\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\Phi_{t+1}^1\left(B\frac{1}{\sqrt{t}}H_t + \frac{1}{t}BM_tBH_t + \frac{1}{2}\frac{1}{t}BH_t'BKBH_t + O_p\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}F_1\left(B\frac{1}{\sqrt{t}}H_t + \frac{1}{t}BM_tBH_t + \frac{1}{2}\frac{1}{t}BH_t'BKBH_t + O_p\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(B\frac{1}{\sqrt{t}}H_t + O_p\left(\frac{1}{t}\right)\right)'\Phi_{t+1}^2\left(B\frac{1}{\sqrt{t}}H_t + O_p\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(B\frac{1}{\sqrt{t}}H_t + O_p\left(\frac{1}{t}\right)\right)'F_2\left(B\frac{1}{\sqrt{t}}H_t + O_p\left(\frac{1}{t}\right)\right) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right).$$

Исключая слагаемые порядка $o_p(1/\sqrt{R})$ в соответствии с леммами 4 и 6 и неравенством Чебышева, имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(\hat{f}_{t+1}-\mathbb{E}[f_{t+1}]\right)=\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(f_{t+1}-\mathbb{E}[f_{t+1}]\right)+\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\Phi^1_{t+1}B\frac{1}{\sqrt{t}}H_t$$

$$+\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}F_1B\frac{1}{\sqrt{t}}H_t+\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{t}F_1BM_tBH_t+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{t}F_1BH_t'BKBH_t$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}H_t\right)'BF_2B\left(\frac{1}{\sqrt{t}}H_t\right)+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)=\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(f_{t+1}-\mathbb{E}[f_{t+1}]\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\Phi^1_{t+1}BH_t-\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\Phi^1_{t+1}BH_t\right]\right)+\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}F_1B\frac{1}{\sqrt{t}}H_t$$

$$+\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(\frac{1}{t}F_1BM_tBH_t-\mathbb{E}\left[\frac{1}{t}F_1BM_tBH_t\right]\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(\frac{1}{t}F_1BH_t'BKBH_t-\mathbb{E}\left[\frac{1}{t}F_1BH_t'BKBH_t\right]\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{t}}H_t\right)'BF_2B\left(\frac{1}{\sqrt{t}}H_t\right)-\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{t}}H_t\right)'BF_2B\left(\frac{1}{\sqrt{t}}H_t\right)\right]\right)$$

$$+b_{st}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),$$

где

$$b_{st}=\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{t}\mathbb{E}\left[\Phi^1_{t+1}B\sqrt{t}H_t\right]+\frac{1}{\sqrt{P}}F_1B\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{t}\mathbb{E}\left[M_tBH_t\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}F_1B\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{t}\mathbb{E}\left[H_t'BKBH_t\right]+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{t}\mathbb{E}\left[H_t'BF_2BH_t\right].$$

Используя леммы 3 и 5, выражение для смещения можно переписать в требуемом виде:

$$b_{st}=\frac{\ln(1+\pi)}{\sqrt{P}}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\Gamma_j+F_1B\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Omega_j+\frac{1}{2}F_1B\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Lambda_j+\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Psi_j\right)+o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),\quad (3)$$

где

$$\Gamma_j=\mathbb{E}\left[\Phi^1_tBh_{t-j}\right],\ \Omega_j=\mathbb{E}\left[m_t'Bh_{t-j}\right],\ \Lambda_j=\mathbb{E}\left[h_t'BKBh_{t-j}\right],\ \Psi_j=\mathbb{E}\left[h_tBF_2Bh_{t-j}\right].$$

Доказательство утверждения для случая скользящего окна полностью повторяет приведенное доказательство для расширяющегося окна со следующими очевидными изменениями:

все суммы вида $\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{\sqrt{t}}$ и $\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{t}$ заменяются суммами $\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{\sqrt{R}}$ и $\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{R}$. Различия в мультипликативном сомножителе λ_B обусловлены тем, что в случае расширяющегося окна

$$\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{t}=\ln(1+\pi)+o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),$$

а в случае скользящего окна

$$\sum_{t=R}^{T-1}\frac{1}{R}=\frac{P}{R}=\pi+o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right).$$

При практическом тестировании гипотез используется t-статистика

$$\Sigma(\hat{\theta}_T)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\left(\hat{f}_{t+1}-\mathbb{E}[f_{t+1}]\right),$$

где дисперсия $\Sigma(\theta)$ приближается величиной $\Sigma(\hat{\theta}_T)$. В следующей теореме приводится выражение для смещения второго порядка для t-статистики.

Теорема 2: При предположениях, указанных в постановке задачи, смещение второго порядка для t-статистики равно

$$b_{t.st}=\frac{1}{\Sigma^{1/2}}b_{st}-\frac{1}{2\Sigma^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{\pi}{1+\pi}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\phi_j+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi_j\right)+o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \tag{4}$$

где b_{st} – асимптотическое смещение второго порядка для знаменателя t-статистики, найденной в теореме 1,

$$\phi_j=\mathbb{E}\left[(f_t-\mathbb{E}[f_t])\,h'_{t-j}\right]B\frac{\partial\Sigma'}{\partial\theta},\quad \varphi_j=F_1B\mathbb{E}\left[h_th'_{t-j}\right]B\frac{\partial\Sigma'}{\partial\theta},$$

$$\Sigma=\Sigma(\theta)=S_{ff}+\lambda_{fh}\left[F_1BS'_{fh}+S_{fh}BF'_1\right]+\lambda_{hh}F_1BS_{hh}BF'_1+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),$$

$$S_{ff}=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}\left[(f_t-\mathbb{E}[f_t])\,(f_{t-j}-\mathbb{E}[f_t])'\right],\ S_{fh}=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}\left[(f_t-\mathbb{E}[f_t])\,h'_{t-j}\right],$$

$$S_{hh}=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}\left[h_th'_{t-j}\right],\ \frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\in\mathbb{R}^{1\mathrm{xm}}.$$

Параметры λ_{fh} и λ_{hh} зависят от типа использованного окна при оценивании параметров: для расширяющегося окна $\lambda_{fh}=1-\frac{1}{\pi}\ln(1+\pi)$ и $\lambda_{hh}=2\left[1-\frac{1}{\pi}\ln(1+\pi)\right]$, для скользящего окна при $\pi\le 1$, $\lambda_{fh}=\frac{\pi}{2}$ и $\lambda_{hh}=\pi-\frac{\pi^2}{3}$, при $\pi>1$, $\lambda_{fh}=1-\frac{1}{2\pi}$ и $\lambda_{hh}=1-\frac{1}{3\pi}$.

Замечание: Поскольку $b_{st}=O(1/\sqrt{R})$, формулу (4) можно применить, когда истинные значения параметров в ней аппроксимируются их оценками, поскольку ошибка аппроксимации будет иметь порядок $o(1/\sqrt{R})$.

Доказательство: Доказательство приведено лишь для случая расширяющегося окна, поскольку для случая скользящего окна доказательство аналогично. Формула для ковариационной матрицы непосредственно следует из леммы 7. Обозначим

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{t=R}^{T-1} \left(f_{t+1} - \mathbb{E}[f_{t+1}]\right), \ W_2 = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{t=R}^{T-1} F_1 B \frac{1}{\sqrt{t}} H_t,$$

$$W_3 = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{t=R}^{T-1} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \Phi_{t+1}^1 B H_t - \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{t}} \Phi_{t+1}^1 B H_t\right]\right),$$

$$W_4 = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{t=R}^{T-1} \left(\frac{1}{t} F_1 B M_t B H_t - \mathbb{E}\left[\frac{1}{t} F_1 B M_t B H_t\right]\right),$$

$$W_5 = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{t=R}^{T-1} \left(\frac{1}{t} F_1 B H_t' B K B H_t - \mathbb{E}\left[\frac{1}{t} F_1 B H_t' B K B H_t\right]\right),$$

$$W_6 = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{t=R}^{T-1} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{t}} H_t\right)' B F_2 B \left(\frac{1}{\sqrt{t}} H_t\right) - \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{t}} H_t\right)' B F_2 B \left(\frac{1}{\sqrt{t}} H_t\right)\right]\right).$$

$$\xi = W_1 + W_2, \quad \nu = \sqrt{R}\left(W_3 + W_4 + \frac{1}{2} W_5 + \frac{1}{2} W_6\right), \quad b = \sqrt{R} b_{st}.$$

Заметим, что $b/\sqrt{R} = O(1/\sqrt{R})$ из формулы (3), а $\nu/\sqrt{R} = o(1)$, поскольку данное слагаемое не участвует в асимптотическом разложении порядка $O(1)$, полученном в работе West & McCracken (1998). Выражение для t-статистики можно переписать в виде

$$\Sigma(\hat{\theta})^{-\frac{1}{2}} \left(\xi + \frac{\nu}{\sqrt{R}} + \frac{b}{\sqrt{R}} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right) = \left(\Sigma^{1/2} + \frac{1}{2\Sigma^{1/2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right)^{-1}$$
$$\times \left(\xi + \frac{\nu}{\sqrt{R}} + \frac{b}{\sqrt{R}} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right) = \frac{1}{\Sigma^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{2\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right)^{-1}$$
$$\times \left(\xi + \frac{\nu}{\sqrt{R}} + \frac{b}{\sqrt{R}} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right) = \frac{\xi}{\Sigma^{1/2}} + \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{\nu}{\Sigma^{1/2}} + \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{b}{\Sigma^{1/2}}$$
$$- \left(\frac{1}{2\Sigma^{3/2}} \xi \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} (\hat{\theta}_T - \theta) - \mathbb{E}\left[\frac{1}{2\Sigma^{3/2}} \xi \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} (\hat{\theta}_T - \theta)\right]\right) - \frac{1}{2\Sigma^{3/2}} \mathbb{E}\left[\xi \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} (\hat{\theta}_T - \theta)\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right).$$

По лемме 8

$$\mathbb{E}\left[\xi \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} (\hat{\theta}_T - \theta)\right)'\right] = \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\pi}{1+\pi} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \phi_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_j\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),$$

где $\phi_j = \mathbb{E}[(f_t - \mathbb{E}[f_t])\, h_{t-j}'] B (\partial\Sigma/\partial\theta)'$ и $\varphi_j = F_1 B \mathbb{E}[h_t h_{t-j}'] B (\partial\Sigma/\partial\theta)'$, $\partial\Sigma/\partial\theta \in \mathbb{R}^{1\mathrm{xm}}$.

Из полученной формулы следует, что смещение второго порядка для разных типов окон, использующихся при оценивании параметров, различается только коэффициентами λ_B, λ_{fh} и λ_{hh}. Поскольку λ_{fh} и λ_{hh} принадлежат интервалу $(0, 2)$, существенная разница в точности асимпотической аппроксимации первого порядка различными методами может произойти лишь вследствие разницы в параметре λ_B. Данный параметр больше, и с ростом π он растет быстрее, в случае скользящего окна, что свидетельствует о том, что при больших значениях отношения P/R асимптотическая аппроксимация первого порядка статистики, использующей скользящее окно, будет неточной. Данный вывод согласуется с результатами статистических испытаний, приведенных в работе West & McCracken (1998), а также с нижеприведенными статистическими испытаниями.

4 Статистические испытания

Рассмотрим простейшую модель авторегрессии первого порядка

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

в которой ошибки предполагаются независимыми и одинаково распределенными нормальными величинами $\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$. Параметр $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ считается известным, а $\beta = 1/2$ оценивается методом наименьших квадратов. Данная модель повторяет модель численного эксперимента, приведенного в работе West & McCracken (1998). Рассмотрим три теста, в которых будет проверяться гипотеза о том, что математическое ожидание некоторой функции качества прогнозов $\mathbb{E}[f_t]$ равно своему теоретическому значению D:

$$H_0 : \ \mathbb{E}[f_t] = D.$$

При этом будут различаться три разновидности каждого теста в зависимости от альтернативной гипотезы:

Тест 1 $\quad H_A : \ \mathbb{E}[f_t] \neq D.$
Тест 2 $\quad H_A : \ \mathbb{E}[f_t] < D.$
Тест 3 $\quad H_A : \ \mathbb{E}[f_t] > D.$

Качество асимптотической аппроксимации будет определяться путем сравнения фактической значимости тестов, полученной при помощи 50000 испытаний Монте–Карло, с теоретическим значением, равным 5%. В приведенных примерах оказалось, что $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\phi_j + \varphi_j\right) \equiv 0$, поэтому лишь первое слагаемое в формуле (4) влияет на смещение второго порядка. Ниже приведены тестируемые гипотезы и отвечающие им функции качества прогнозов, теоретические значения их математических ожиданий, а также аналитические значения для смещения и дисперсии соответственно.

Тест A: серийная ковариация ошибок: $H_0 : \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = 0,\ f_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1},\ D = 0,\ b_{t.st} = 2 \frac{1}{\Sigma^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{P}} \lambda_B \sigma_\varepsilon^2 \hat{\beta},\ \Sigma = \sigma_\varepsilon^4 + -2\sigma_\varepsilon^4 (1 - \hat{\beta}^2) \lambda_{fh} + \sigma_\varepsilon^4 (1 - \hat{\beta}^2) \lambda_{hh}.$

Тест B: ожидаемый квадрат ошибки прогноза: $H_0 : \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_e^2,\ f_t = \varepsilon_t^2,\ D = \sigma_e^2,\ b_{t.st} = 2 \frac{1}{\Sigma^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{P}} \lambda_B \sigma_\varepsilon^2,\ \Sigma = 2\sigma_\varepsilon^4.$

Тест C: связь ошибок прогноза с другими величинами: $H_0 : \mathbb{E}[\varepsilon_t y_{t-2}] = 0,\ f_t = \varepsilon_t y_{t-2},\ D = 0,\ b_{t.st} = -\frac{1}{\Sigma^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{P}} \lambda_B \sigma_\varepsilon^2,\ \Sigma = \sigma_\varepsilon^4 (1 + \hat{\beta}^2 (\lambda_{hh} - 2\lambda_{fh}))/(1 - \hat{\beta}^2).$

На Рис. 1–6 показаны фактические значимости рассматриваемых тестов при использовании скользящего и расширяющегося окна. Оси абсцисс соответствуют значения параметра R при $P = 200 - R$, а оси ординат соответствует вероятность ошибки первого рода в процентах. Каждая гипотеза при каждой альтернативе тестируется с использованием статистик $\hat{V}/\hat{S}_{ff}^{1/2}$, $\hat{V}/\hat{\Sigma}^{1/2}$, $\hat{V}/\hat{\Sigma}^{1/2} - \hat{b}_{t.st}$ и их асимптотического (нормального) распределения. Переменные пунктиры соответствуют статистике $\hat{V}/\hat{S}_{ff}^{1/2}$, длинные пунктиры – статистике $\hat{V}/\hat{\Sigma}^{1/2}$, сплошные линии – статистике $\hat{V}/\hat{\Sigma}^{1/2} - \hat{b}_{t.st}$. В первой t-статистике не учитывается влияние оценивания неизвестных параметров θ на асимптотическое распределение, вторая t-статистика строится в соответствии с асимптотическими результатами из статей West (1996) и West & McCracken (1998), а третья статистика представляет собой вторую t-статистику, скорректированную на оценку ее асимптотического смещения второго порядка.

В тестах B1, B2 и B3 при скользящем окне и во всех тестах при расширяющемся окне значимости для статистик $\hat{V}/\hat{S}_{ff}^{1/2}$ и $\hat{V}/\hat{\Sigma}^{1/2}$ совпадают, поскольку в этих случаях $S_{ff} \equiv \Sigma$,

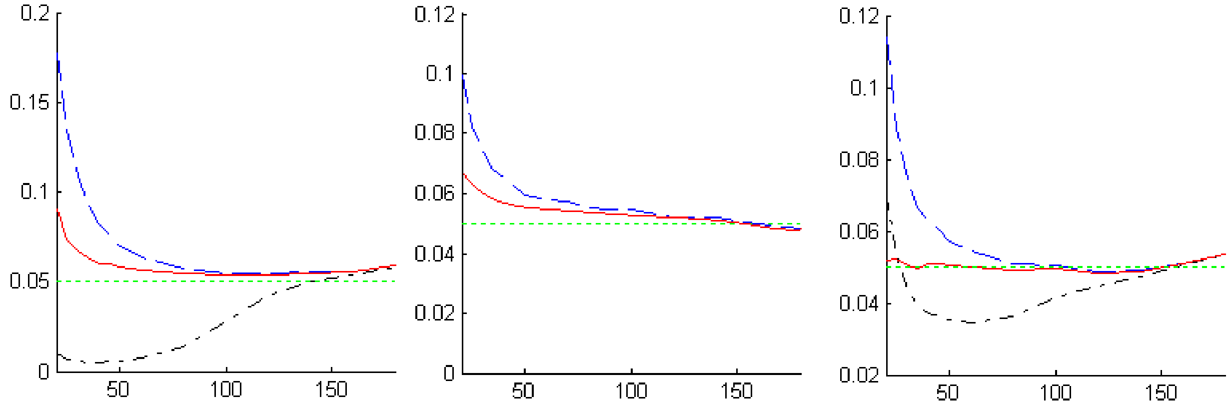

Рис. 1: Уровень значимости при скользящем окне наблюдений для тестов A1, B1 и C1.

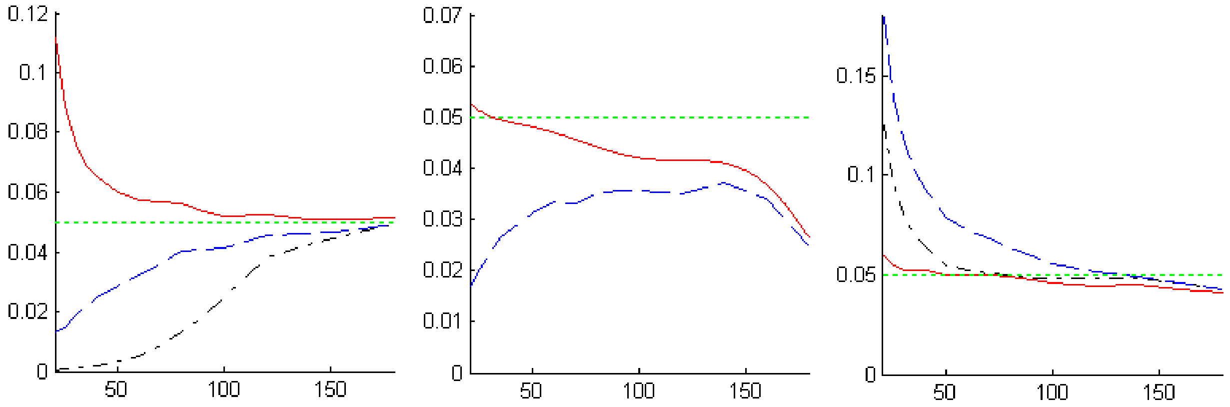

Рис. 2: Уровень значимости при скользящем окне наблюдений для тестов A2, B2 и C2.

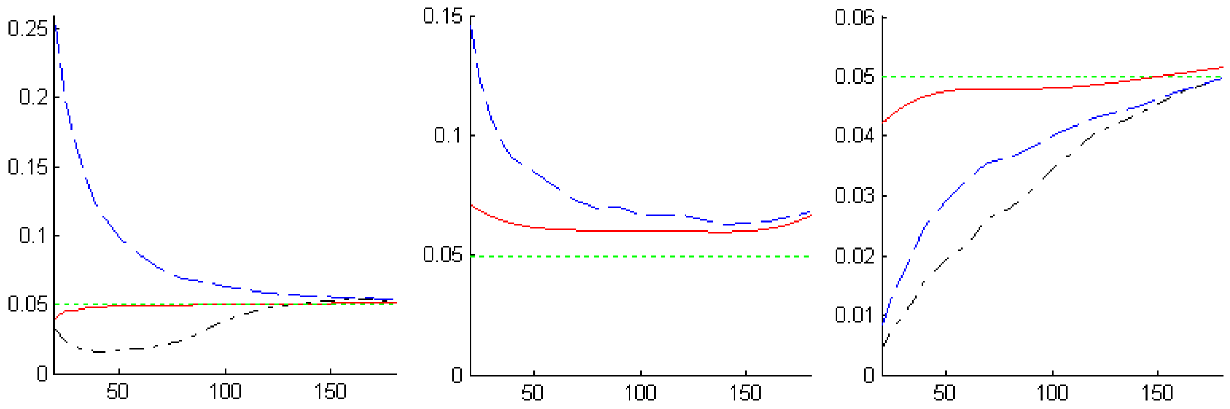

Рис. 3: Уровень значимости при скользящем окне наблюдений для тестов A3, B3 и C3.

и t-статистики оказываются эквивалентными. Из рисунков 1–6 видно, что за исключением ситуаций, в которых $S_{ff} \equiv \Sigma$, значимость двустороннего теста, полученного с помощью обычной t-статистики $\hat{V}/\hat{S}_{ff}^{1/2}$, ниже теоретической значимости, что отражает несостоятельность данного вида тестирования. Фактическая значимость приближается к теоретической лишь когда R достаточно велико, поскольку в этом случае разница между θ и $\hat{\theta}_t$ становится несущественной. Значимость тестов, полученных с помощью t-статистики $\hat{V}/\hat{\Sigma}^{1/2}$, в большей степени соответствует теоретической значимости, равной 5%. Отклонение от 5% тем больше, чем выше отношение P/R, что объясняется большим асимптотическим смеще-

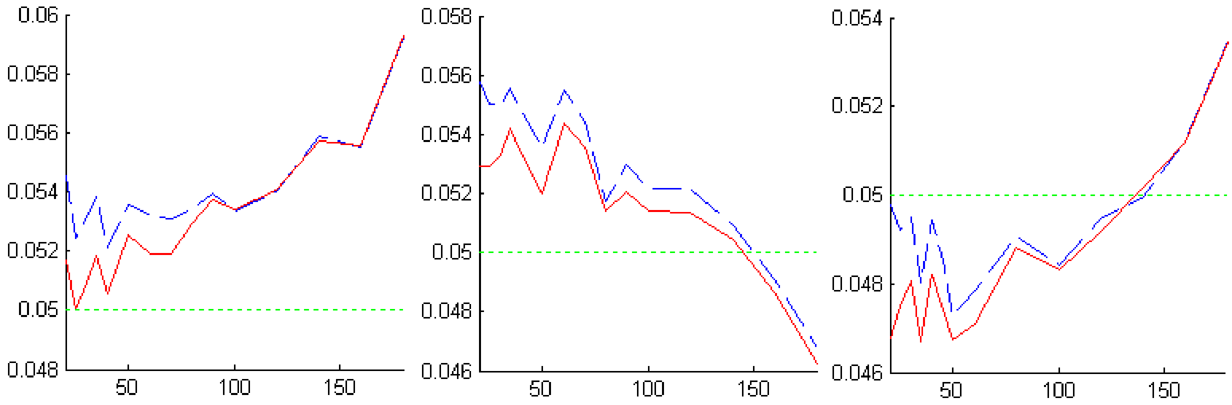

Рис. 4: Уровень значимости при расширяющемся окне наблюдений для тестов A1, B1 и C1.

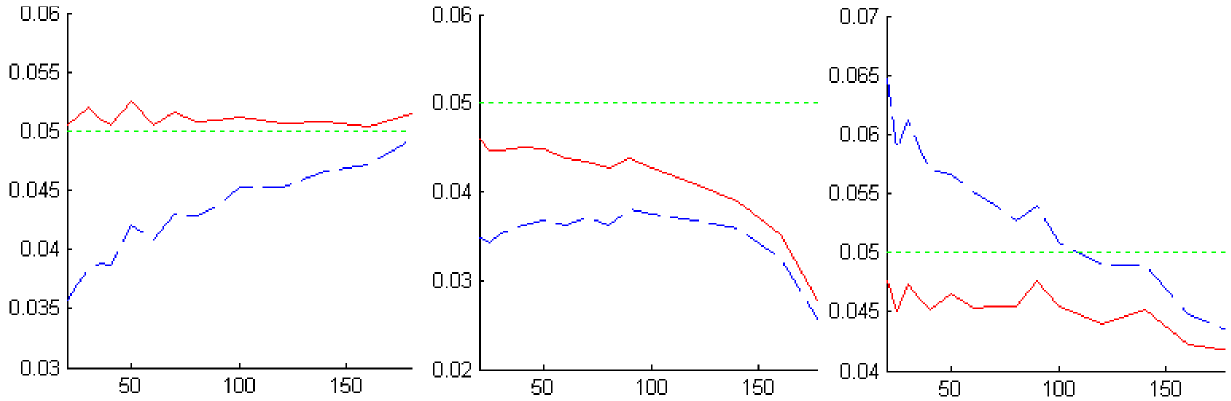

Рис. 5: Уровень значимости при расширяющемся окне наблюдений для тестов A2, B2 и C2.

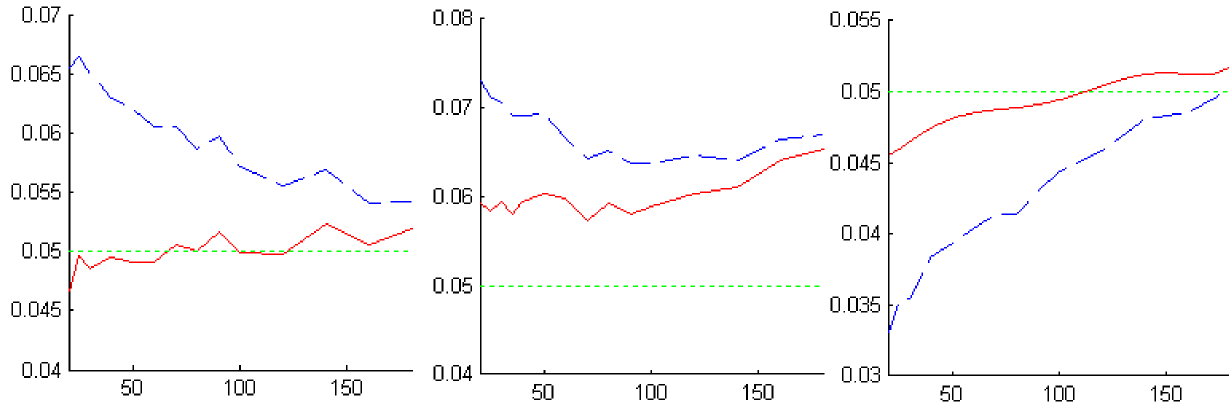

Рис. 6: Уровень значимости при расширяющемся окне наблюдений для тестов A3, B3 и C3.

нием статистики ввиду формулы (4), которое не учитывается в данном виде тестирования. В случае использования расширяющегося окна учет смещения второго порядка не оказывает существенного влияния на соответствие фактической и теоретической значимости для двухстороннего теста 1. Однако учет смещения позволяет существенно улучшить соответствие теоретической и фактической значимости для односторонних тестов 2 и 3, что объясняется большей чувствительностью односторонних тестов к смещенности распределения статистики. В случае использования скользящего окна корректировкой смещения удается существенно улучшить соответствие между теоретической и фактической значимостью как для односторонних, так и для двухсторонних тестов, особенно для случаев, когда отношение P/R велико, что подтверждает аналитические результаты, полученные в статье.

5 Заключение

В работе исследовалась проблема неточной аппроксимации распределения статистики, оценивающей качество прогнозов, посредством его асимптотического распределения первого порядка, полученного в работах West (1996) и West & McCracken (1998). Было получено асимптотическое разложение второго порядка указанной статистики, из которого следует, что статистика обладает ненулевым смещением второго порядка. От использования расширяющегося или же скользящего окна при оценивании неизвестных параметров в формуле смещения второго порядка зависят лишь три коэффициента. Из вида данных коэффициентов следует, что смещение в случае расширяющегося окна принимает существенно меньшие значения, чем в случае скользящего окна, особенно когда отношение P/R велико. Полученные аналитические результаты подтверждаются статистическими испытаниями в работе West & McCracken (1998) и численными примерами данной работы. Учет полученного смещения позволяет значительно повысить точность асимптотической аппроксимации распределения статистики, оценивающей качество прогнозов, в случае использования скользящего окна.

Благодарности

Автор выражает благодарность профессору Российской экономической школы Анатольеву Станиславу за важные комментарии и советы в ходе исследования.

Список литературы

Ибрагимов, И.А. & Ю.В. Линник (1965). *Независимые и стационарно связанные величины.* Ленинград: Наука.

Маккракен, М. (2006). Парные тесты на одинаковую точность прогнозов. *Квантиль* 1, 53–62.

Clements, M.P. (2005). *Evaluating Econometric Forecasts of Economic and Financial Variables.* Palgrave Macmillan.

Manski, C.F. (1988). *Analog Estimation Methods in Econometrics.* Chapman & Hall.

West, K.D. (1996). Asymptotic inference about predictive ability. *Econometrica* 64, 1067–1084.

West, K.D. & M. McCracken (1998). Regression-based tests of predictive ability. *International Economic Review* 39, 817–40.

Приложение

В работе используется метод экстремального оценивания, согласно которому истинное значение неизвестного параметра удовлетворяет условию

$$\theta = \arg\max_{q\in\Theta} \mathbb{E}\left[\psi\left(z, q\right)\right].$$

Поскольку вероятностная мера, по которой производится усреднение, неизвестна, для приближенного нахождения параметра θ используется метод аналогий, при котором операция математического ожидания заменяется усреднением по наблюдениям выборки. Существуют различные варианты дополнительных предположений, гарантирующих состоятельность оценки $\hat{\theta}_t$, полученной методом аналогий. Возможными дополнительными ограничениями, согласно теореме 2', приведенной в главе 7.2.2 книги Manski (1988), являются:

1. Множество Θ является компактом.
2. Решение задачи $\max_{q\in\Theta} \mathbb{E}\left[\psi\left(z,q\right)\right]$ единственно.
3. Существует такая функция $D(z)$, что $\mathbb{E}[D(z)] < \infty$ и $|\psi(z,q)| < D(z)$ $\forall (z,q) \in (Z,\Theta)$, где Z – область значений переменной z.

Лемма 1: Предположим, функция $\psi\left(z,q\right)$ измерима и три раза непрерывно дифференцируема в области Θ. а также предположим, что выполнено условие равномерной интегрируемости: $\mathbb{E}[|\psi(z,q)|\,|\,|\psi(z,q)| > K] \to 0$ равномерно по $q \in \Theta$. Тогда при условии состоятельности оценки $\hat{\theta}_t$ (ограничения 1–3) имеют место следующие результаты:
(a): При использовании расширяющегося окна наблюдений

$$\hat{\theta}_t = \arg\max_{q\in\Theta} \frac{1}{t}\sum_{\tau=1}^{t} \psi\left(z_\tau, q\right),$$

выполнено

$$\hat{\theta}_t - \theta = B\frac{1}{\sqrt{t}}H_t + \frac{1}{t}BM_tBH_t + \frac{1}{2}\frac{1}{t}BH_t'BKBH_t + O_p\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right),$$

где

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t} h_\tau, \quad M_t = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t} m_\tau.$$

(b): При использовании скользящего окна наблюдений

$$\hat{\theta}_t = \arg\max_{q\in\Theta} \frac{1}{R}\sum_{\tau=t-R+1}^{t} \psi\left(z_\tau, q\right),$$

выполнено

$$\hat{\theta}_t - \theta = B\frac{1}{\sqrt{R}}H_t + \frac{1}{R}BM_tBH_t + \frac{1}{2}\frac{1}{R}BH_t'BKBH_t + O_p\left(\frac{1}{R\sqrt{R}}\right),$$

где

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{R}}\sum_{\tau=t-R+1}^{t} h_\tau, \quad M_t = \frac{1}{\sqrt{R}}\sum_{\tau=t-R+1}^{t} m_\tau.$$

Доказательство: Утверждения (a) и (b) похожи, поэтому будет доказано лишь утверждение (a). Так как θ доставляет максимум функционалу $\mathbb{E}\left[\psi\left(z,q\right)\right]$, то, в силу предположений о дифференцируемости и равномерной интегрируемости, θ является решением уравнения

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial\psi\left(z,\theta\right)}{\partial q}\right] = 0.$$

Выборочным аналогом данного уравнения является

$$\frac{1}{t}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial\psi(z_\tau,\hat{\theta})}{\partial q} = 0.$$

Выборочный аналог состоятельно оценивает θ согласно предположению.

Разложение Тэйлора первого порядка вокруг истинного параметра θ принимает вид

$$0 = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q} + \frac{1}{t}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial^2\psi(z_\tau,\tilde{\theta})}{\partial q\partial q'}\sqrt{t}\left(\hat{\theta}_t - \theta\right),$$

где $\tilde{\theta}$ лежит между θ и $\hat{\theta}_t$. Отсюда

$$\sqrt{t}\left(\hat{\theta}_t-\theta\right)=-\left(\frac{1}{t}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial^2\psi(z_\tau,\tilde{\theta})}{\partial q\partial q'}\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q}$$

По теореме Биркоффа–Хинчина

$$\sqrt{t}\left(\hat{\theta}_t-\theta\right)=-J^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q}+O_p\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Осуществляя разложение Тэйлора второго порядка относительно θ, получим:

$$0=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q}+\frac{1}{t}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial^2\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q\partial q'}\sqrt{t}\left(\hat{\theta}_t-\theta\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{t\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\left(\sqrt{t}(\hat{\theta}_t-\theta)\right)'\frac{\partial^3\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q^3}\left(\sqrt{t}(\hat{\theta}_t-\theta)\right)+O_p\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q}+\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\left(\frac{\partial^2\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q\partial q'}-J\right)\sqrt{t}(\hat{\theta}_t-\theta)+J\sqrt{t}(\hat{\theta}_t-\theta)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{t\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\left(\sqrt{t}(\hat{\theta}_t-\theta)\right)'\frac{\partial^3\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q^3}\left(\sqrt{t}(\hat{\theta}_t-\theta)\right)+O_p\left(\frac{1}{t}\right).$$

Подставляя разложение Тэйлора первого порядка для $\sqrt{t}\left(\hat{\theta}_t-\theta\right)$, имеем

$$\hat{\theta}_t-\theta=-J^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q}+\frac{1}{t}J^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\left(\frac{\partial^2\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q\partial q'}-J\right)J^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{t}J^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q}\right)'J^{-1}KJ^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q}\right)+O_p\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right).$$

Таким образом,

$$\hat{\theta}_t-\theta=-J^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}H_t+\frac{1}{t}J^{-1}M_tJ^{-1}H_t-\frac{1}{2}\frac{1}{t}J^{-1}H_t'J^{-1}KJ^{-1}H_t+O_p\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right),$$

где

$$H_t=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\partial\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q},\quad m_\tau=\frac{\partial^2\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q\partial q'}-J,\quad M_t=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\tau=1}^{t}\left(\frac{\partial^2\psi\left(z_\tau,\theta\right)}{\partial q\partial q'}-J\right).$$

Остальные леммы приводятся без доказательств. Доказательства используют монографию Ибрагимов & Линник (1965).

Лемма 2: Справедлив результат

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{t=R}^{T-1}\sum_{i,j,k=1}^{m}\frac{\partial^3 f(z_{t+1},\tilde{\theta}_t)}{\partial\theta^i\partial\theta^j\partial\theta^k}\left(\hat{\theta}_t^i-\theta^i\right)\left(\hat{\theta}_t^j-\theta^j\right)\left(\hat{\theta}_t^k-\theta^k\right)=o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right).$$

Лемма 3: $\mathbb{E}\left[\Phi_{t+1}^1 B\sqrt{t}H_t\right]=\sum_{j=1}^{+\infty}\Gamma_j+o\left(1\right),\ \mathbb{E}\left[M_tBH_t\right]=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Omega_j+o\left(1\right),\ \mathbb{E}\left[H_t'BKBH_t\right]=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Lambda_j+o\left(1\right),\ \mathbb{E}\left[H_t'BF_2BH_t\right]=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Psi_j+o\left(1\right).$

Лемма 4: Пусть существует такая константа K, что $\mathbb{E}[|\eta_t|] < K$ при $t \geq 1$. Тогда $\forall a > 1$

$$\frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{t=R}^{T-1} \frac{1}{t^a} \eta_t = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right).$$

Лемма 5: Справедлив результат

$$a_K = \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \ldots + \frac{1}{R+P-1} = \ln\left(\frac{T}{K}\right) + O\left(\frac{1}{K}\right).$$

Лемма 6: Пусть случайные величины ξ_t, μ_t, η_t и a_t, b_t, c_t являются элементами вектора G_t (указанного в постановке задачи), и пусть $d_{i,j} = \mathbb{E}\left[\xi_t \mu_{t+i} \eta_{t+j}\right]$. Тогда

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{t} a_j \sum_{j=1}^{t} b_j\right], \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{t} a_j \sum_{j=1}^{t} b_j \sum_{j=1}^{t} c_j\right] = O(t),\ \mathbb{E}\left[a_1 \sum_{j=1}^{t} b_j \sum_{j=1}^{t} c_j\right] = O(1).$$

Лемма 7: Пусть

$$\Sigma\left(\theta\right) = \mathbb{V}\left[\frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{t=R}^{T-1} \left(\hat{f}_{t+1} - \mathbb{E} f_{t+1}\right)\right]$$

обозначает асимптотическую дисперсию статистики, оценивающей качество прогнозов. Тогда

$$\Sigma\left(\theta\right) = S_{ff} + \lambda_{fh}\left(F_1 B S_{fh}' + S_{fh} B F_1'\right) + \lambda_{hh} F_1 B S_{hh} B F_1' + o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),$$

где $S_{ff} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[(f_t - \mathbb{E}[f_t])\left(f_{t-j} - \mathbb{E}[f_{t-j}]\right)']$, $S_{fh} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[(f_t - \mathbb{E}[f_t])\, h_{t-j}']$, $S_{hh} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[h_t h_{t-j}']$, а параметры λ_{fh}, λ_{hh} принимают следующие значения для различных типов окон: для расширяющегося окна $\lambda_{fh} = 1 - \frac{1}{\pi}\ln\left(1+\pi\right)$, $\lambda_{hh} = 2\left(1 - \frac{1}{\pi}\ln\left(1+\pi\right)\right)$, для скользящего окна при $\pi \leq 1$, $\lambda_{fh} = \frac{\pi}{2}$ и $\lambda_{hh} = \pi - \frac{\pi^2}{3}$, при $\pi > 1$, $\lambda_{fh} = 1 - \frac{1}{2\pi}$ и $\lambda_{hh} = 1 - \frac{1}{3\pi}$.

Лемма 8: Пусть $\xi = W_1 + W_2$ (используя обозначения теоремы 2), $\partial\Sigma/\partial\theta \in R^{1\mathrm{xm}}$ – вектор производных дисперсии статистики, оценивающей качество прогнозов. Тогда

$$\mathbb{E}\left[\xi\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}(\hat{\theta}_T - \theta)\right)'\right] = \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\pi}{1+\pi}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \phi_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_j\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),$$

где $\phi_j = \mathbb{E}[(f_t - \mathbb{E}[f_t])\, h_{t-j}'] B(\partial\Sigma/\partial\theta)'$ и $\varphi_j = F_1 B \mathbb{E}[h_t h_{t-j}'] B(\partial\Sigma/\partial\theta)'$.

Second order bias in a forecast evaluation statistic

Victor Kitov

Moscow State University, Moscow, Russia

We derive the second order asymptotic bias for a statistic evaluating the quality of out-of-sample forecasts by parametric models. The existing literature admits that the quality of the first order asymptotic approximation may be unsatisfactory. We find that the second order asymptotic bias allows one to explain insufficient precision of the asymptotic approximation. Simulations confirm the obtained analytical results.

Keywords: forecast evaluation, model comparison, parameter estimation, second order asymptotic bias, hypothesis testing

JEL Classification: C22, C52, C53