Эффекты воздействия*

Уитни К. Ньюи†

Массачусетсский Технологический Институт, Кэмбридж, США

Данное эссе посвящено вопросам идентификации и оценивания среднего эффекта воздействия и среднего эффекта воздействия на подвергшихся воздействию.

Введение

В работах, посвященных эффектам воздействия, исследуется, как на некоторый интересующий исследователя исход, например, на заработную плату, влияют некоторые другие параметры, такие как программы по обучению персонала. Очевидно, что эффекты воздействия имеют отношение к структурным моделям, в которых интересующий исследователя параметр находится в левой части регрессионного уравнения, а переменные, отвечающие за воздействия – в правой. Действительно, как мы увидим, модель с эффектами воздействия можно рассматривать как линейную структурную модель со случайными коэффициентами. Для облегчения восприятия в данной работе будет введена специальная терминология, общепринятая для моделей с эффектами воздействия.

Объекты мы будем нумеровать с помощью индекса i, а через D_i обозначим индикатор воздействия, принимающий значение 1, если объект был подвержен этому воздействию, и значение 0 в противном случае. Например, $D_i = 1$ может означать, что индивид с номером i принимал участие в программе по обучению персонала или проходил медицинское лечение. Для того, чтобы описать эффект воздействия, необходимо ввести еще два параметра. Пусть Y_{i0} обозначает возможный исход, полученный в случае, если объект не был подвержен воздействию ($D_i = 0$), а Y_{i1} – возможный исход в случае, если объект был подвержен воздействию ($D_i = 1$). Ясно, что эти два параметра ненаблюдаемы. Один из них является «гипотетическим»: он обозначает исход, который мог бы быть получен, если бы применялось обратное воздействие. Тогда наблюдаемый исход будет выражаться как

$$Y_i = D_i Y_{i1} + (1 - D_i) Y_{i0}.$$

Эффект воздействия для объекта i определяется как

$$\beta_i = Y_{i1} - Y_{i0}.$$

Этот параметр неидентифицируем, поскольку наблюдается только один из возможных исходов. Но существуют некоторые другие параметры, которые при определенных условиях можно оценить. Один из них – это популяционный средний эффект воздействия (average treatment effect):

$$ATE \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\beta_i].$$

*Перевод Е. Скиба и С. Анатольева. Эссе является материалом по курсу “New Econometric Methods,” прочитанного весной 2007 г. в Массачусетсском Технологическом Институте, в рамках MIT OpenCourseWare (ocw.mit.edu). Цитировать как: Ньюи, Уитни К. (2009) «Эффекты воздействия», Квантиль, №6, стр. 15–23. Citation: Newey, Whitney K. (2009) “Treatment effects,” Quantile, No.6, pp. 15–23.

†Адрес: Department of Economics, Massachusetts Institute of Technology, 50 Memorial Drive, Building E52, Room 262D, Cambridge, MA 02142-1347, USA. Электронная почта: *wnewey@mit.edu*

Он описывает эффект воздействия, усредненный по всей популяции объектов. Другой интересный параметр – это популяционный средний эффект воздействия на подвергшихся воздействию (average effect of treatment on treated):

$$ATT \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\beta_i | D_i = 1].$$

Он описывает эффект воздействия, усредненный по всей популяции подвергшихся воздействию объектов. Третий важный и интересный для исследования параметр называется локальным средним эффектом воздействия. Он будет введен нами в дальнейшем.

Для того чтобы лучше понять воздействия и разнообразные эффекты, которые они оказывают, установим связь между нашей моделью и регрессионной моделью со случайными коэффициентами. Из предыдущего уравнения для Y_i получаем:

$$Y_i = Y_{i0} + (Y_{i1} - Y_{i0})D_i = \alpha_i + \beta_i D_i,$$

$$\alpha_i = Y_{i0}, \ \ \beta_i = Y_{i1} - Y_{i0}.$$

Таким образом, Y_i можно представить в виде линейной модели, в которой эффект воздействия β_i является коэффициентом при D_i, а константа α_i и угол наклона β_i меняются в зависимости от объекта. Следовательно, ATE есть средний по всей популяции угол наклона, а ATT – угол наклона, усредненный по подмножеству всех объектов популяции, имеющих $D_i = 1$.

Определение этих случайных коэффициентов помогает понять историю возникновения теории эффектов воздействия. Коэффициент $\beta_i = Y_{i1} - Y_{i0}$ иногда называют «гипотетическим», так как он объясняет, как менялся бы Y_i при изменении D_i. В моделях спроса и предложения используется понятие «движения вдоль кривой». Оно появилось в экономике благодаря Райту (Wright, 1928), который нашел ему оригинальное объяснение в рамках этой модели. Точно так же средний эффект воздействия – это просто ожидаемое значение случайного коэффициента в линейной модели, то есть средний угол наклона кривой.

Разнообразные допущения в модели позволяют оценить ATT и ATE. В данной работе будут обсуждаться некоторые условия, при которых возможно идентифицировать эти параметры. Доказательства будут проводиться путем демонстрации того, как эти параметры можно представить в виде ожидаемых значений данных.

Начнем с самого простого случая.

Однородные эффекты воздействия

Простейший случай в этой модели – случай однородных эффектов воздействия, когда $\beta_i = \bar{\beta}$, то есть эффект воздействия один и тот же для всех объектов. Тогда ATT и ATE – это просто $\bar{\beta}$. В этом случае, обозначив $\bar{\alpha} = \mathbb{E}[\alpha_i]$ и $\varepsilon_i = \alpha_i - \bar{\alpha}$, получаем

$$Y_i = \bar{\alpha} + \bar{\beta} D_i + \varepsilon_i.$$

Тогда модель сводится к обычной линейной модели с аддитивными ошибками и постоянными коэффициентами. В противоположность этому в базовую модель также входят аддитивные ошибки, но углы наклона случайны. Обратим внимание на то, что случайность α_i эквивалентна ее представлению в виде суммы константы и возмущения: $\alpha_i = \bar{\alpha} + \varepsilon_i$.

Идентифицировать и оценить $\bar{\beta}$ и $\bar{\alpha}$ можно обычным способом, если у нас имеется инструмент Z_i, некоррелированный с ε_i и коррелированный с D_i, так что

$$0 = \mathbb{C}(Z_i, \varepsilon_i) = \mathbb{C}(Z_i, \alpha_i) = \mathbb{C}(Z_i, Y_{i0}),$$

$$\mathbb{C}(Z_i, D_i) \neq 0.$$

В этом случае коэффициенты можно идентифицировать через обычные инструментальные уравнения:

$$\bar{\beta} = \frac{\mathbb{C}(Z_i, Y_i)}{\mathbb{C}(Z_i, D_i)}.$$

Оценить эти коэффициенты можно стандартным образом, заменив популяционную ковариацию на выборочную. Если подвести итог, в данном разделе не было введено ничего нового, кроме использования терминологии из теории эффектов воздействия в стандартной модели с фиктивными переменными.

Предположение об однородности эффектов воздействия является слишком сильным во многих ситуациях. Например, можно считать, что влияние на заработную плату программ по повышению квалификации или влияние уменьшения числа учеников в классе на уровень образования одинаковы для каждого объекта. Однако непохоже, что эти предположения выполняются в действительности. Поэтому в дальнейшем будем считать, что коэффициент β_i меняется в зависимости от объекта.

Случайное распределение

Случайное распределение означает, что исход не зависит от того, был ли объект подвержен воздействию или нет. Здесь мы делаем статистическое предположение

$$\mathbb{E}[Y_{i0}|D_i] = \mathbb{E}[Y_{i0}],$$

то есть среднее значение исхода по всем неподвергшимся воздействию объектам, не зависит от статуса подверженности воздействию. То же самое условие можно записать как $\mathbb{E}[\alpha_i|D_i] = 0$. Оно является более общим, чем условие независимости, поскольку позволяет моментам Y_{i0} более высокого порядка зависеть от D_i. Тем не менее, сложно представить ситуацию, в которой будет выполняться условие независимости среднего без полной независимости.

Для того чтобы понять, что происходит при этом предположении, заметим сначала, что

$$\mathbb{E}[\beta_i|D_i]D_i = \begin{cases} 0, & D_i = 0, \\ \mathbb{E}[\beta_i|D_i = 1], & D_i = 1, \end{cases} = \mathbb{E}[\beta_i|D_i = 1]D_i.$$

Тогда в условии независимости среднего получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_i|D_i] &= \mathbb{E}[\alpha_i + \beta_i D_i|D_i] = \mathbb{E}[\alpha_i] + \mathbb{E}[\beta_i|D_i]D_i \\ &= E[\alpha_i] + \mathbb{E}[\beta_i|D_i = 1]D_i. \end{aligned}$$

В данном случае фиктивная переменная в регрессии Y_i на константу и D_i имеет в качестве углового коэффициента ATT. Если кроме того мы предположим, что среднее значение Y_{i1} не зависит от D_i, то есть

$$\mathbb{E}[Y_{i1}|D_i] = \mathbb{E}[Y_{i1}],$$

то в результате имеем $ATE = ATT$, поскольку

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\beta_i|D_i = 1] &= \mathbb{E}[Y_{i1}|D_i = 1] - \mathbb{E}[Y_{i0}|D_i = 1] \\ &= \mathbb{E}[Y_{i1}] - \mathbb{E}[Y_{i0}] = \mathbb{E}[\beta_i]. \end{aligned}$$

В итоге мы получили, что когда Y_{i0} независимо от D_i в среднем, ATT представляется как дамми-коэффициент в регрессии исхода на константу и индикатор воздействия. Также мы показали, что если, кроме того, Y_{i1} независимо от D_i в среднем, ATE является тем же самым коэффициентом. Конечно, этот коэффициент можно оценить с помощью линейной регрессии Y_i на $(1, D_i)$. Более того, как и следовало ожидать, этот коэффициент в регрессии является единственным, что отличает средние значения Y_i для подвергшихся и не подвергшихся воздействию объектов.

Обсуждение

Для многих приложений случайное распределение – слишком сильное допущение. Обычно объекты могут выбирать, хотят ли они подвергаться воздействию или нет, например, покидая выборку в случае, если условия воздействия их не устраивают. Люди могут уклоняться от программ по повышению квалификации или не пользоваться медицинским обслуживанием. Если эти решения связаны с (α_i, β_i), то мы не можем говорить о независимости (α_i, β_i) и D_i. В рамках линейной модели $Y_i = \alpha_i + \beta_i D_i$ возможна эндогенность, при которой D_i может коррелировать со случайными коэффициентами α_i и β_i. Этот случай сложнее стандартного, поскольку угол наклона β_i также может коррелировать с D_i.

Существуют два подхода к этой проблеме. Первый (знакомый) подход состоит в применении инструментальных переменных. Второй подход получил название «отбор по наблюдаемым характеристикам». В этом случае благодаря анализу, условному на некоторые наблюдаемые переменные, исчезает корреляция между D_i и (α_i, β_i). Поскольку использование инструментов является наиболее известным и распространенным способом решения этой проблемы, мы сначала его и рассмотрим.

Инструментальная идентификация эффектов воздействия

В обычной линейной модели, для которой однородность эффектов воздействия – лишь частный случай, для нахождения угла наклона необходимо предположить некоррелируемость инструментов с возмущениями и их коррелируемость с D_i. Похожие условия будут использоваться для идентификации эффектов воздействия с помощью инструментов. Пусть Z_i – инструмент. Будем предполагать, что

$$\mathbb{E}[\alpha_i|Z_i] = \mathbb{E}[Y_{i0}|Z_i] = \mathbb{E}[Y_{i0}] = \mathbb{E}[\alpha_i],$$

то есть средний эффект у всех неподвергшихся воздействию объектов независим от инструментов.

Мы также рассмотрим случай, когда Z_i является фиктивной переменной, то есть когда $Z_i \in \{0, 1\}$ с $P = \mathbb{P}\{Z_i = 1\}$ и $0 < P < 1$. (Вопрос: зачем мы предполагаем $0 < P < 1$?). Для дамми-инструмента существует полезная формула для ковариации между инструментом и любой другой случайной величиной W_i. В частности, можно получить, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}(W_i, Z_i) &= \mathbb{E}[W_i Z_i] - \mathbb{E}[W_i]\mathbb{E}[Z_i] = \left(\frac{\mathbb{E}[W_i Z_i]}{P} - \mathbb{E}[W_i]\right) P \\
&= (\mathbb{E}[W_i|Z_i = 1] - \mathbb{E}[W_i])P \\
&= \{\mathbb{E}[W_i|Z_i = 1] - (P\mathbb{E}[W_i|Z_i = 1] + (1 - P)\mathbb{E}[W_i|Z_i = 0])\}P \\
&= (\mathbb{E}[W_i|Z_i = 1] - \mathbb{E}[W_i|Z_i = 0])P(1 - P).
\end{aligned}$$

То есть ковариация между W_i и Z_i представляется в виде разницы двух условных средних величин при различных значениях Z_i, умноженной на $P(1 - P)$.

Из этой формулы можно сделать два полезных вывода. Во-первых, независимость среднего Y_{i0} от Z_i эквивалентна некоррелированности Y_{i0} и Z_i, что верно поскольку $\mathbb{C}(Y_{i0}, Z_i) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}[Y_{i0}|Z_i = 1] = \mathbb{E}[Y_{i0}|Z_i = 0]$. Во-вторых, из этой формулы можно получить выражение для предела инструментальной оценки угла наклона:

$$\frac{\mathbb{C}(Z_i, Y_i)}{\mathbb{C}(Z_i, D_i)} = \frac{\mathbb{E}[Y_i|Z_i = 1] - E[Y_i|Z_i = 0]}{\mathbb{E}[D_i|Z_i = 1] - E[D_i|Z_i = 0]}.$$

Этот результат называют Вальдовской формулой для инструментальных переменных, ссылаясь на работу Wald (1940), в которой Вальд использовал фиктивные переменные в качестве инструмента для решения проблемы ошибок измерения.

Непохоже, что при условии независимости в среднем α_i от Z_i инструментальная формула идентифицируют ATT, ATE или вообще что-либо полезное. Подстановка $Y_i = \alpha_i + \beta_i D_i$, и использование независимости в среднем α_i дает

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{C}(Z_i, Y_i)}{\mathbb{C}(Z_i, D_i)} &= \frac{\mathbb{E}[\alpha_i|Z_i = 1] - \mathbb{E}[\alpha_i|Z_i = 0] + \mathbb{E}[\beta_i D_i|Z_i = 1] - \mathbb{E}[\beta_i D_i|Z_i = 0]}{\mathbb{E}[D_i|Z_i = 1] - \mathbb{E}[D_i|Z_i = 0]} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\beta_i D_i|Z_i = 1] - \mathbb{E}[\beta_i D_i|Z_i = 0]}{\mathbb{E}[D_i|Z_i = 1] - \mathbb{E}[D_i|Z_i = 0]}.\end{aligned}$$

Проблема заключается в коррелированности β_i и D_i, что в общем случае не позволяет их разделить. Тем не менее, существуют два особых случая, в которых кое-что важное идентифицируемо: случай случайной склонности к воздействию и случай локальных средних эффектов воздействия.

Случайная склонность к воздействию

Стандартен случай в медицинской практике, когда людям назначают лечение случайным образом, но не все его принимают. Тогда параметр Z_i отвечает за назначение, то есть $Z_i = 1$, если индивиду i назначено лечение, и $Z_i = 0$ в противном случае. В такой постановке только те проходят лечение (то есть для кого $D_i = 1$), кому это лечение было случайным образом приписано. Оказывается, что в этом случае инструменты позволяют получить ATT. Этот результат благодаря Имбенсу и Рубину привело к широкому использованию инструментов в биостатистике.

Прежде чем показать, как инструменты позволяют получить ATT, отметим, что все объекты, у которых $Z_i = 0$, не будут подвержены воздействию, то есть из того, что $D_i = 0$ следует, что $Z_i = 0$. Тогда

$$\frac{\mathbb{C}(Z_i, Y_i)}{\mathbb{C}(Z_i, D_i)} = \frac{\mathbb{E}[\beta_i D_i|Z_i = 1] - 0}{\mathbb{E}[D_i|Z_i = 1] - 0} = \frac{\mathbb{E}[\beta_i D_i|Z_i = 1]}{\mathbb{E}[D_i|Z_i = 1]}.$$

Также заметим, что из из условия $D_i = 1$ следует условие $Z_i = 1$, то есть $\{D_i = 1\} \subset \{Z_i = 1\}$. Следовательно, $\mathbb{E}[\beta_i|D_i = 1, Z_i = 1] = \mathbb{E}[\beta_i|D_i = 1] = ATT$. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, получаем

$$D_i \mathbb{E}[\beta_i|D_i, Z_i = 1] = D_i \mathbb{E}[\beta_i|D_i = 1, Z_i = 1] = D_i \cdot ATT.$$

Используем закон повторных математических ожиданий:

$$\mathbb{E}[\beta_i D_i|Z_i = 1] = \mathbb{E}[D_i \mathbb{E}[\beta_i|D_i, Z_i = 1]|Z_i = 1] = ATT \cdot \mathbb{E}[D_i|Z_i = 1].$$

В итоге, разделив на $\mathbb{E}[D_i|Z_i = 1]$, получаем

$$\frac{\mathbb{C}(Z_i, Y_i)}{\mathbb{C}(Z_i, D_i)} = \frac{\mathbb{E}[\beta_i D_i|Z_i = 1]}{\mathbb{E}[D_i|Z_i = 1]} = \frac{ATT \cdot \mathbb{E}[D_i|Z_i = 1]}{\mathbb{E}[D_i|Z_i = 1]} = ATT.$$

Локальный средний эффект воздействия

Во втором интересном случае, когда эффект воздействия можно идентифицировать с помощью инструментальных переменных, появляются условия независимости и монотонности. Рассмотрим следующие условия:

Независимость: $D_i = \Pi(Z_i, V_i)$, и вектор (β_i, V_i) независим от Z_i.

Монотонность: $\Pi(1, V_i) \geq \Pi(0, V_i)$ и $\mathbb{P}\{\Pi(1, V_i) > \Pi(0, V_i)\} > 0$.

Условие независимости означает, что существует приведенная форма $\Pi(z, v)$ с возмущением V_i, которое может быть вектором и может входить в модель нелинейно. В качестве примера можно привести модель пересечения порога, в которой $D_i = \mathbb{I}\{Z_i + V_i > 0\}$. Условие монотонности означает, что изменение инструмента влечет изменение воздействия в одном и том же направлении. Это условие выполняется в модели пересечения порога. Приведенную форму этой модели иногда называют уравнением выбора, согласно которому объект подвергают воздействию, когда $\Pi(z, v) = 1$.

Оказывается, что в этих условиях инструменты позволяют найти среднее значение β_i по некоторому подмножеству популяции, называемое локальным средним эффектом воздействия (local average treatment effect). Этот эффект можно определить как

$$LATE = \mathbb{E}[\beta_i | \Pi(1, V_i) > \Pi(0, V_i)].$$

LATE – это средний эффект воздействия среди тех объектов, чье поведение было бы другим, если бы изменились инструменты. Этот параметр может представлять интерес, например, в модели, где Y_i – логарифм заработной платы, D_i – индикатор окончания средней школы, Z_i – фиктивная переменная, соответствующая кварталу рождения, а LATE – средний эффект от образования среди всех отчисленных из школы, которые бы остались в школе, если бы имели другой квартал рождения, и среди всех оставшихся в школе, которые были бы отчислены, если бы имели другой квартал рождения. Таким образом, инструменты оценивают среднюю полезность от получения образования для потенциально отчисленных. LATE – интересный параметр, хотя он и не отражает доходность образования для всей популяции.

Покажем, что инструменты позволяют получить LATE при условиях независимости и монотонности. Пусть $T_i = \Pi(1, V_i) - \Pi(0, V_i)$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\beta_i D_i | Z_i = 1] - \mathbb{E}[\beta_i D_i | Z_i = 0] &= \mathbb{E}[\beta_i \Pi(1, V_i) | Z_i = 1] - \mathbb{E}[\beta_i \Pi(1, V_i) | Z_i = 0] \\ &= \mathbb{E}[\beta_i \Pi(1, V_i)] - \mathbb{E}[\beta_i \Pi(1, V_i)] = \mathbb{E}[\beta_i T_i].\end{aligned}$$

Похожим образом можно получить, что

$$\mathbb{E}[D_i | Z_i = 1] - \mathbb{E}[D_i | Z_i = 0] = \mathbb{E}[T_i].$$

По условию монотонности, T_i – фиктивная переменная, принимающая значения 0 или 1. Следовательно,

$$\frac{\mathbb{C}(Z_i, Y_i)}{\mathbb{C}(Z_i, D_i)} = \frac{\mathbb{E}[\beta_i T_i]}{\mathbb{E}[T_i]} = \mathbb{E}[\beta_i | T_i = 1] = \mathbb{E}[\beta_i | \Pi(1, V_i) > \Pi(0, V_i)].$$

Эмпирический пример применения LATE

Приведем эмпирический пример применения LATE из работы Ангриста и Кругера (Angrist & Krueger, 1991), в которой была получена оценка доходности образования при использовании кварталов рождения в качестве инструментов. Данные взяты из переписи населения США 1980-го года, как и в работе Дональда и Ньюи (Donald & Newey, 2001). Двухшаговый метод наименьших квадратов с тремя инструментами дает результат 0,1077 со стандартной ошибкой 0,0195, а оценивание по Фуллеру со 180 инструментами дает результат 0,1063 со стандартной ошибкой (скорректированной на множественность инструментов) 0,0143. Таким образом, получаем, что доходность обучения для «потенциально отчисленных» составляет около 11 процентов.

Отбор по наблюдаемым характеристикам

Для идентификации эффекта воздействия используется другой тип модели, в которой анализ условно на наблюдаемых (или идентифицируемых) переменных X_i заставляет эффект воздействия вести себя как если бы он задавался случайно. Аналогичный подход применялся для удаления эндогенности в линейном уравнении добавлением регрессоров. Условные переменные похожи на пропущенные регрессоры, при включении которых в регрессионное уравнение эндогенность исчезает. Делается специальное предположение:

$$\mathbb{E}[Y_{i0}|X_i, D_i] = \mathbb{E}[Y_{i0}|X_i],$$

то есть Y_{i0} независимо в среднем от D_i условно на X_i. Такое предположение похоже на используемое ранее предположение $\mathbb{E}[Y_{i0}|D_i] = \mathbb{E}[Y_{i0}]$ и является его «условной» версией.

Проблема здесь в том, что неясно, откуда взять переменные X_i. Существует несколько экономических моделей, в которых такие переменные заложены в самой модели. Однако во многих практических случаях эти переменные выбираются без ссылок на модель. Вопрос идентификации тонкий, и важно подобрать правильные X_i. Условная независимость в среднем, которая должна выполняться для X_i, может не выполняться ни для подмножества X_i, ни когда к X_i добавлены дополнительные переменные.

Такое предположение позволяет идентифицировать ATT при наличии еще одного дополнительного условия. Пусть $\mathcal{X}$ обозначает носитель X_i (наименьшее замкнутое множество, имеющее единичную вероятность), а $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$ – носители X_i условно на $D_i = 0$ и $D_i = 1$ соответственно. Тогда дополнительное условие – это условие общего носителя

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_1.$$

Такое предположение является необходимым и достаточным условием для существования $\mathbb{E}[Y_i|X_i, D_i = 1]$ и $\mathbb{E}[Y_i|X_i, D_i = 0]$ для всех X_i. Всегда можно проверить, выполняется ли оно на практике или нет.

Из условия общего носителя и условия условной независимости в среднем получаем:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_i|X_i, D_i = 1] - \mathbb{E}[Y_i|X_i, D_i = 0] &= \mathbb{E}[\alpha_i|X_i, D_i = 1] - \mathbb{E}[\alpha_i|X_i, D_i = 0] \\ &\quad + \mathbb{E}[\beta_i|X_i, D_i = 1] = \mathbb{E}[\beta_i|X_i, D_i = 1].\end{aligned}$$

Здесь $\mathbb{E}[\beta_i|X_i, D_i = 1]$ – это условная версия ATT. С помощью закона повторных математических ожиданий ATT определяется как математическое ожидание этой разницы по X_i условно на $D_i = 1$, то есть

$$ATT = \mathbb{E}[\beta_i|D_i = 1] = \mathbb{E}[(\mathbb{E}[Y_i|X_i, D_i = 1] - \mathbb{E}[Y_i|X_i, D_i = 0])|D_i = 1].$$

ATE также можно получить, если мы предположим, что Y_{i1} условно независимо в среднем от D_i условно на X_i. В этом случае

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\beta_i|X_i, D_i = 1] &= \mathbb{E}[Y_{i1}|X_i, D_i = 1] - \mathbb{E}[Y_{i0}|X_i, D_i = 1] \\ &= \mathbb{E}[Y_{i1}|X_i] - \mathbb{E}[Y_{i0}|X_i] = \mathbb{E}[\beta_i|X_i].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$ATE = \mathbb{E}[\beta_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_i|X_i, D_i = 1] - \mathbb{E}[Y_i|X_i, D_i = 0]].$$

В отличие от безусловного случая, ATE является отличной от ATT функцией от распределения данных. ATE получается путем усреднения $\mathbb{E}[Y_i|X_i, D_i = 1] - \mathbb{E}[Y_i|X_i, D_i = 0]$ по всем X_i, в то время как ATT получается с помощью усреднения только при $D_i = 1$.

Оценивание ATT и ATE при этих условных ограничениях – сложная задача. Заметим, что эти параметры зависят от условных ожиданий. Обычно не предполагается, что условные ожидания имеют какую-то определенную функциональную форму. Следовательно, необходимо использовать непараметрическое регрессионное оценивание.

Непарараметрическое оценивание проводить сложно, когда у X_i большая размерность. Обычно такую ситуацию называют «проклятием размерности». Были попытки ослабить проклятие размерности с помощью «меры склонности» – функции $P(X)$, заданной как вероятность оказаться подверженным воздействию (или оказаться «выбранным») условно на X, то есть

$$P(X_i) = \mathbb{P}\{D_i = 1|X_i\} = \mathbb{E}[D_i|X_i].$$

Оказывается, что условная независимость в среднем Y_{i0} условно на X_i влечет условную независимость в среднем условно на $P(X_i)$. Таким образом, если бы $P(X_i)$ было известно, то представлялось бы возможным найти и оценить ATT и ATE, используя одномерную условную переменную, а не многомерную величину X_i. А именно, если $\mathbb{E}[Y_{i0}|X_i, D_i] = \mathbb{E}[Y_{i0}|X_i]$ и $0 < P(X_i) < 1$ с вероятностью единица, то $\mathbb{E}[Y_{i0}|P(X_i), D_i] = \mathbb{E}[Y_{i0}|P(X_i)]$, так что рассуждения, приведенные выше, позволяют получить:

$$ATT = \mathbb{E}[(\mathbb{E}[Y_i|P(X_i), D_i = 1] - \mathbb{E}[Y_i|P(X_i), D_i = 0])|D_i = 1].$$

Если, кроме того, $\mathbb{E}[Y_{i0}|X_i, D_i] = \mathbb{E}[Y_{i0}|X_i]$, то

$$ATE = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_i|P(X_i), D_i = 1] - \mathbb{E}[Y_i|P(X_i), D_i = 0]].$$

Таким образом, ATT и ATE есть математические ожидания от непараметрической функции от двух переменных, $P(X_i)$ и D_i.

Если $P(X_i)$ полностью неизвестна и неспецифицирована, то никакой пользы от анализа условно на «мере склонности» нет, поскольку $P(X_i)$ тоже является функцией многомерного аргумента. Таким образом, положительный эффект от использования «меры склонности» возникает тогда, когда о $P(X)$ известно больше, чем о $\mathbb{E}[Y_i|X_i, D_i]$.

Остается доказать, что из независимости условно на X следует независимость условно на $P(X)$. Обозначим ради простоты $P_i = P(X_i)$. Мы получим результат для произвольной переменной W_i, и его можно будет применить и к Y_{i0}, и к Y_{i1}. Для того чтобы доказать, что из $\mathbb{E}[W_i|X_i, D_i] = \mathbb{E}[W_i|X_i]$ следует $\mathbb{E}[W_i|P_i, D_i] = \mathbb{E}[W_i|P_i]$, заметим, что по закону повторных математических ожиданий

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_i|P_i, D_i = 1] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[W_i|X_i, D_i = 1]|P_i, D_i = 1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[W_i|X_i]|P_i, D_i = 1] \\
&= \frac{\mathbb{E}[D_i\mathbb{E}[W_i|X_i]|P_i]}{\mathbb{E}[D_i|P_i]} = \frac{\mathbb{E}[P_i\mathbb{E}[W_i|X_i]|P_i]}{P_i} \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[W_i|X_i]|P_i] = \mathbb{E}[W_i|P_i].
\end{aligned}$$

Точно таким же способом можно получить, что $\mathbb{E}[W_i|P_i, D_i = 0] = \mathbb{E}[W_i|P_i]$, так что нужное нам утверждение следует из предыдущего равенства.

Отсутствие непрерывности в регрессии

Существуют два таких случая: в первом случае переменная воздействия меняется скачками, а во втором случае функция вероятности эффекта воздействия имеет разрывы.

Предположим, $D_i = \mathbb{I}\{X_i \geq c\}$. В этом случае $\mathbb{E}[Y_{i0}|D_i, X_i] = \mathbb{E}[Y_{i0}|X_i]$ и $\mathbb{E}[Y_{i1}|D_i, X_i] = \mathbb{E}[Y_{i1}|X_i]$ по построению. Условие общего носителя не выполняется, поскольку $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$ не пересекаются.

Применим другой подход для идентификации параметров и положимся только на условие непрерывности для $\mathbb{E}[Y_{i0}|X_i = x]$ и $\mathbb{E}[Y_{i1}|X_i = x]$.

Предположение: $\mathbb{E}[Y_{i0}|X_i = x]$ и $\mathbb{E}[Y_{i1}|X_i = x]$ непрерывны по x в точке c.

Заметим, что $Y_i = Y_{i0}$ при $X_i < c$ и $Y_i = Y_{i1}$ при $X_i \geq c$. Тогда

$$\mathbb{E}[Y_{i0}|X_i = c] = \lim_{x \uparrow c} \mathbb{E}[Y_{i0}|X_i = x] = \lim_{x \uparrow c} \mathbb{E}[Y_i|X_i = x],$$

$$\mathbb{E}[Y_{i1}|X_i = c] = \lim_{x \downarrow c} \mathbb{E}[Y_{i1}|X_i = x] = \lim_{x \downarrow c} \mathbb{E}[Y_i|X_i = x].$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{E}[\beta_i|X_i = c] = \mathbb{E}[Y_{i1} - Y_{i0}|X_i = c] = \lim_{x \downarrow c} \mathbb{E}[Y_i|X_i = x] - \lim_{x \uparrow c} \mathbb{E}[Y_i|X_i = x].$$

Таким образом, условный эффект воздействия $\mathbb{E}[Y_{i1} - Y_{i0}|X_i = c]$ определяется как скачок $\mathbb{E}[Y_i|X_i = x]$ в точке $x = c$.

Можно интерпретировать этот эффект по-другому. Аналогично манипуляциям выше,

$$\mathbb{E}[\beta_i|X_i = c] = \mathbb{E}[Y_i|D_i = 1, X_i = c] - \mathbb{E}[Y_i|D_i = 0, X_i = c].$$

Заметим, что $\mathbb{E}[Y_i|D_i = 1, X_i = c]$ и $\mathbb{E}[Y_i|D_i = 0, X_i = c]$ представляют собой непараметрические регрессионные функции, оцененные на границах их носителей: первая – на нижней границе, а вторая – на верхней. Значит, в данной ситуации нельзя применять стандартную ядерную регрессию, но можно применить локальную линейную регрессию.

Литература

Angrist, J.D. & A.B. Krueger (1991). Does compulsory school attendance affect schooling and earning? *Quarterly Journal of Economics* 106, 979–1014.

Donald, S. & W. Newey (2001). Choosing the number of instruments. *Econometrica* 69, 1161–1191.

Wald, A. (1940). The fitting of straight lines if both variables are subject to error. *Annals of Mathematical Statistics* 11, 284–300.

Wright, P.G. (1928). *The Tariff on Animal and Vegetable Oils.* New York: MacMillan.

Treatment effects

Whitney K. Newey

Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA

This essay discusses the issues of identification and estimation of the average treatment effect and the average effect of treatment on the treated.