Решения

Решение 7.1

Временной ряд $\{X_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ со свойством $\mathbb{E}[X_t] < \infty$ называется линейным (или имеет свойство линейной регрессии), если для всех $s \geq 0$ выполнено

$$\mathbb{E}[X_{t+s}|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k}] = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_k X_{t-k},$$

то есть если матожидания X_t, условные на конечном количестве прошлых X-ов, линейны. Покажите с помощью контрпримера, что линейность временного ряда – не то же самое, что требование линейности условного матожидания на всей предыстории $\mathbb{E}[X_{t+s}|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots]$.

Подобный контрпример приводит Salih Neftci (1991, сноска 5). Пусть последовательность ϵ_t состоит из независимых одинаково распределенных элементов, причем $\epsilon_t = -1$ с вероятностью $\frac{2}{3}$ и $\epsilon_t = 2$ с вероятностью $\frac{1}{3}$. Построим процесс X_t как $X_t = \epsilon_t + \frac{1}{2}\epsilon_{t-1}$. Этот процесс имеет представление в виде бесконечного бегущего среднего, и, следовательно, является линейным по всем прошлым X_t. В то же время $\mathbb{E}[X_t|X_{t-1}]$ не может быть линейным по X_{t-1}. Действительно, можно рассчитать, что $\mathbb{E}[X_t|X_{t-1} = 0] = -\frac{1}{2}$, в то время как из линейности следовало бы $\mathbb{E}[X_t|X_{t-1} = 0] = 0$.

Решение 7.2

Предположим, что

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i,$$

где u_i независимо и одинаково распределены, причем $\mathbb{E}[u_i] = 0$, $\mathbb{E}\left[u_i^2\right] = \sigma^2$ и $\mathbb{E}\left[u_i^3\right] = \nu$, в то время как регрессор x_i детерминистически ужимается: $x_i = \rho^i$, где $\rho \in (0,1)$. Пусть размер выборки равен n. Выясните асимптотическое поведение МНК-оценок $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$ для $(\alpha, \beta, \sigma^2)$ по мере того как $n \to \infty$.

МНК-оценки имеют вид

$$\hat{\beta} = \frac{n^{-1}\sum_i y_i x_i - \left(n^{-1}\sum_i y_i\right)\left(n^{-1}\sum_i x_i\right)}{n^{-1}\sum_i x_i^2 - \left(n^{-1}\sum_i x_i\right)^2}, \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_i y_i - \hat{\beta}\cdot\frac{1}{n}\sum_i x_i \tag{1}$$

и

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_i \hat{e_i}^2.$$

Рассмотрим сначала $\hat{\beta}$. Из (1) и модели следует, что

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{n^{-1}\sum_i(\alpha+\beta x_i+u_i)x_i - n^{-2}\sum_i(\alpha+\beta x_i+u_i)\sum_i x_i}{n^{-1}\sum_i x_i^2 - n^{-2}(\sum_i x_i)^2} \\ &= \beta + \frac{n^{-1}\sum_i \rho^i u_i - n^{-2}\sum_i u_i \sum_i \rho^i}{n^{-1}\sum_i \rho^{2i} - n^{-2}(\sum_i \rho^i)^2} = \beta + \frac{\sum_i \rho^i u_i - \frac{\rho(1-\rho^n)}{1-\rho}n^{-1}\sum_i u_i}{\frac{\rho^2(1-\rho^{2n})}{1-\rho^2} - n^{-1}\left(\frac{\rho(1-\rho^n)}{1-\rho}\right)^2},\end{aligned}$$

что сходится к

$$\beta + \frac{1-\rho^2}{\rho^2}\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho^i u_i,$$

при условии, что случайная величина $\xi \equiv \text{plim} \sum_i \rho^i u_i$ существует. Ее моменты находятся как $\mathbb{E}[\xi] = 0$, $\mathbb{E}\left[\xi^2\right] = \sigma^2\frac{\rho^2}{1-\rho^2}$ and $\mathbb{E}\left[\xi^3\right] = \nu\frac{\rho^3}{1-\rho^3}$. Следовательно,

$$\hat{\beta} - \beta \xrightarrow{d} \frac{1-\rho^2}{\rho^2}\xi. \tag{2}$$

Теперь взглянем на $\hat{\alpha}$. Опять же, из (1) и модели видно, что

$$\hat{\alpha} = \alpha + (\beta - \hat{\beta}) \cdot \frac{1}{n}\sum_i \rho^i + \frac{1}{n}\sum_i u_i \xrightarrow{p} \alpha,$$

где использованы (2) и ЗБЧ для среднего u_i-х. Далее,

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\beta - \hat{\beta})\frac{\rho(1-\rho^{1+n})}{1-\rho} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_i u_i = U_n + V_n.$$

В силу (2) $U_n \xrightarrow{p} 0$. Из ЦПТ следует, что $V_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Все это вместе дает

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Наконец, разберемся с $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_i \hat{e}_i^2 = \frac{1}{n}\sum_i \Big((\alpha - \hat{\alpha}) + (\beta - \hat{\beta})x_i + u_i\Big)^2. \tag{3}$$

Используя то, что (1) $(\alpha - \hat{\alpha})^2 \xrightarrow{p} 0$, (2) $(\beta - \hat{\beta})^2/n \xrightarrow{p} 0$, (3) $n^{-1}\sum_i u_i^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$, (4) $n^{-1}\sum_i u_i \xrightarrow{p} 0$, (5) $n^{-1/2}\sum_i \rho^i u_i \xrightarrow{p} 0$, можно заключить, что

$$\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2.$$

Далее заметим, что $n^{-\delta}(\beta - \hat{\beta}) \xrightarrow{p} 0$ и $n^{-\delta}\sum_i \rho^i u_i \xrightarrow{p} 0$ для любого $\delta > 0$. Используя ту же технику, что и ранее, можно вывести, что

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \overset{A}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_i (u_i^2 - \sigma^2),$$

поскольку остальные члены сходятся по вероятности к нулю. Используя ЦПТ, получаем

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, m_4),$$

где предполагается, что $m_4 = \mathbb{E}\left[u_i^4\right] - \sigma^4$ существует.

Решение 7.3

Рассмотрим модель

$$y = \alpha z^2 + u, \quad z = \pi x + v,$$

где

$$\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} | x\right] = 0, \quad \mathbb{V}\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} | x\right] = \Sigma,$$

причем матрица Σ неизвестна. Набор троек $\{(x_i, z_i, y_i)\}_{i=1}^n$ образует случайную выборку.

1. Рассмотрим следующий двушаговый метод оценивания. На первом шаге мы регрессируем z на x и определяем $\hat{z} = \hat{\pi}x$, где $\hat{\pi}$ – МНК-оценка. На втором шаге мы регрессируем y на $\hat{z}^2$ и получаем МНК-оценку α. Покажите, что такая оценка α несостоятельна.
2. Предложите метод состоятельного оценивания α в духе 2ШМНК.

1. Предложенная оценка удовлетворяет

$$\tilde{\alpha} = \left(\frac{1}{n}\sum_i \hat{z}_i^4\right)^{-1} \frac{1}{n}\sum_i \hat{z}_i^2 y_i = \left(\hat{\pi}^4 \frac{1}{n}\sum_i x_i^4\right)^{-1} \hat{\pi}^2 \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 y_i.$$

Известно, что $n^{-1}\sum_i x_i^4 \xrightarrow{p} \mathbb{E}\left[x^4\right]$, $n^{-1}\sum_i x_i^2 y_i = \alpha\pi^2 n^{-1}\sum_i x_i^4 + 2\alpha\pi n^{-1}\sum_i x_i^3 v_i + \alpha n^{-1}\sum_i x_i^2 v_i^2 + n^{-1}\sum_i x_i^2 u_i \xrightarrow{p} \alpha\pi^2\mathbb{E}\left[x^4\right] + \alpha\mathbb{E}\left[x^2 v^2\right]$, and $\hat{\pi} \xrightarrow{p} \pi$. Поэтому

$$\tilde{\alpha} \xrightarrow{p} \alpha + \frac{\alpha}{\pi^2}\frac{\mathbb{E}\left[x^2 v^2\right]}{\mathbb{E}\left[x^4\right]} \neq \alpha.$$

2. Поскольку регрессором является z^2, а не z, необходимо найти проекцию z^2 на пространство инструментов. Заметим, что

$$\mathbb{E}\left[z^2|x\right] = \mathbb{E}\left[(\pi x + v)^2|x\right] = \pi^2 x^2 + 2\mathbb{E}\left[\pi x v|x\right] + \mathbb{E}\left[v^2|x\right] = \pi^2 x^2 + \sigma_v^2.$$

Следовательно, на первом шаге мы должны прорегрессировать z^2 на x^2 с константой и построить $\widehat{z_i^2} = \widehat{\pi^2} x_i^2 + \widehat{\sigma_v^2}$, а на втором шаге прорегрессировать y на $\widehat{z^2}$. Состоятельность такой оценки следует из теории 2ШМНК.

Список литературы

Neftci, S.N. (1991). Naive trading rules in financial markets and Wiener-Kolmogorov prediction theory: A study of "technical analysis." *Journal of Business* 64, 549–571.