Хеджирование фьючерсами: многомерные GARCH с динамическими условными корреляциями*

Алексей Колоколов†

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия
Университет Тор Вергата, Рим, Италия

В настоящей статье исследуются способы моделирования взаимосвязей между фьючерсными и спот-ценами финансовых индексов, а также проверяется практическая ценность эконометрических моделей для хеджирования фьючерсами на российских и зарубежных данных. Динамика фьючерсных и спот-цен описывается векторной моделью исправления ошибок, а волатильности и корреляции – различными многомерными GARCH-моделями из класса моделей с динамическими условными корреляциями разной степени детализации. Проведенное в работе эмпирическое исследование позволяет сделать выводы об эффективности применения стратегий хеджирования, основанных на многомерных GARCH-моделях, о сходствах и различиях взаимозависимостей между фьючерсами и базовыми активами на российском и иностранных финансовых ранках и о практически оправданной степени детализации многомерных GARCH-моделей.
Ключевые слова: фьючерсы, хеджирование, многомерные GARCH-модели, динамические условные корреляции
Классификация JEL: C32, C51, C53, G11, G15

1 Введение

Хеджирование фьючерсами заключается в создании короткой или длинной позиции по фьючерсным контрактам для ослабления эффектов неблагоприятных изменений цен базовых инструментов. Ключевая проблема хеджирования – выбор оптимального, в том или ином смысле, отношения хеджирования, которое определяется как отношение позиции по фьючерсам к позиции по базовому активу.

Долгое время при оценивании оптимальных отношений хеджирования превалировал статический подход, предложенный и разработанный в Johnson (1960) и Ederington (1979), в рамках которого оптимальное отношение хеджирования определяется как коэффициент наклона в регрессии изменения спот-цены на изменение цены фьючерсного контракта и может быть оценено методом наименьших квадратов (МНК). Однако данный метод подвергся интенсивной критике: такая оценка базируется на оценках безусловных дисперсии и ковариации, а условная информация опускается (Myers & Thompson, 1989), полученные МНК-оценки неэффективны из-за наличия автокорреляционных связей в рядах цен, и игнорируются характерные для финансовых данных эффекты, такие как гетероскедастичность (Park & Bera, 1987).

В настоящее время развитие теории временных рядов и финансовой эконометрики позволяет получить оценки условных (относительно всей имеющейся к данному моменту времени информации) отношений хеджирования. Такие динамические отношения хеджирования рассчитываются как отношения условных ковариаций между ценами фьючерсов и спот-ценами активов к условным дисперсиям цен фьючерсов и минимизируют дисперсию суммарной позиции инвестора по хеджевым и хеджируемым активам.

*Цитировать как: Колоколов, Алексей (2011) «Хеджирование фьючерсами: многомерные GARCH с динамическими условными корреляциями», Квантиль, №9, стр. 61–75. Citation: Kolokolov, Alexei (2011) "Futures hedging: Multivariate GARCH with dynamic conditional correlations," Quantile, No.9, pp. 61–75.
†Адрес: 117997, г. Москва, Стремянный переулок, д. 36. Электронная почта: *alexeiuo@gmail.com*

Для получения оценок динамических отношений хеджирования необходимо оценить условное математическое ожидание и условную ковариационную матрицу двумерного случайного процесса цен фьючерсных контрактов и спот-цен финансовых индексов. Интуитивная догадка о коинтегрируемости рядов значений индексов и фьючерсов зачастую подтверждается свойствами наблюдаемых данных. Более того, эмпирически установлено, что игнорирование коинтеграции ведет к недооценке отношений хеджирования (Ghosh, 1993).

Большую роль при оценивании оптимальных динамических отношений хеджирования играет выбор модели для условной ковариационной матрицы. Моделирование ковариационных матриц началось с модели VEC – прямого обобщения одномерных GARCH-моделей на векторный случай (Bollerslev, Engle & Wooldridge, 1988), после видоизмененной в более компактную модель – BEKK (Engle & Kroner, 1995). Данные модели оказались, однако, неудобными из-за сложности ограничений, гарантирующих положительную определенность ковариационной матрицы, большого количества параметров, подлежащих оцениванию, и неясности их интерпретации. Поэтому на смену им пришли новые модели, отдельно представляющие динамику корреляций и волатильности, – сначала модель постоянных корреляций (Bollerslev, 1990), затем – модели динамических корреляций (Tse & Tsui, 2002 и Engle, 2002). Признание и широкое распространение за ее простоту и эффективность заслужила модель динамических условных корреляций Энгла (Engle, 2002). Позже она неоднократно модифицировалась и дорабатывалась, что позволило исследователям и практикам учитывать при моделировании разнообразные эффекты динамики корреляций, в частности, эффект асимметрии (Cappiello, Engle & Sheppard, 2006).

Большое количество литературы посвящено изучению практической ценности различных моделей с меняющимися условными корреляциями, например, Bystrom (2003), Lee & Yoder (2007), Skintzi & Xanthopolous-Sisinis (2007), Yang & Allen (2004), и неоднократно констатировалась их высокая эффективность. В то же время известны случаи, когда эффективность применения моделей более высокого уровня может быть существенно снижена из-за ошибок, возникающих по причине сложности оценивания их параметров и увеличения транзакционных издержек (Tse & Tsui, 2002).

Данная работа посвящена оцениванию оптимальных отношений хеджирования с помощью трех многомерных GARCH-моделей класса изменяющихся условных корреляций разной степени детализации и эмпирическому исследованию эффективности предложенных подходов на российском и зарубежных финансовых рынках.

Во втором разделе приводятся теоретические аспекты хеджирования фьючерсными контрактами. В третьем и четвертом разделах кратко описаны модели, использованные в работе для прогнозирования условных ковариаций, и способы оценивания их параметров. В пятом разделе представлены данные, использованные в работе, приведены оценки параметров моделей и результаты проверки связанных с ними статистических гипотез. Исследование эффективности применения моделей для оценки оптимальных отношений хеджирования представлено в шестом разделе.

2 Стратегии хеджирования фьючерсными контрактами

При вычислении количества фьючерсных контрактов, необходимого для сокращения риска конкретной позиции по базовым хеджируемым активам, исследователи и практики апеллируют к понятию отношения хеджирования. По определению Халла (Hull, 2006) отношение хеджирования – это отношение объема инвестиций в хеджевый актив к объему инвестиций в актив, подверженный риску.

Предположим, что инвестор занимает длинную позицию по одному базовому активу, и обозначим через s_t и f_t логарифмы цен хеджируемого (базового) и хеджевого (фьючерса) активов, соответственно, в момент времени t. Тогда доходность инвестора в момент t составит

$$R_t^u = s_t - s_{t-1}$$

в случае, если инвестор не предпринимает действий по хеджированию инвестиций, а при хеджировании фьючерсами она может быть принята примерно равной

$$R_t^h = (s_t - s_{t-1}) - h_t(f_t - f_{t-1}),$$

где $s_t - s_{t-1}$ и $f_t - f_{t-1}$ – доходности инвестора по базовому активу и по фьючерсным контрактам соответственно, а h_t – отношение хеджирования в момент времени t. Нетрудно проверить, что условная, относительно информации до момента времени t, дисперсия доходности инвестора в момент t представима в виде суммы:

$$\mathbb{V}_{t-1}(R_t^h) = \mathbb{V}_{t-1}(s_t) + h_t^2\mathbb{V}_{t-1}(f_t) - 2h_t\mathbb{C}_{t-1}(s_t, f_t),$$

где $\mathbb{V}_{t-1}(s_t)$ и $\mathbb{V}_{t-1}(f_t)$ – условные дисперсии логарифмов цен базового актива и фьючерса, а $\mathbb{C}_{t-1}(s_t, f_t)$ – условная ковариация между ними.

Исходя из принципа полного ослабления риска, оптимальное в момент t отношение хеджирования можно определить как такое отношение хеджирования, при котором условная, относительно информации до момента времени t, дисперсия доходности в момент t достигает минимума (см. Ederington, 1979 и Hull, 2006):

$$h_t^* = \frac{\mathbb{C}_{t-1}(s_t, f_t)}{\mathbb{V}_{t-1}(f_t)}. \tag{1}$$

На практике при расчете оптимального отношения хеджирования в момент времени t, располагая данными до момента t, условные ковариации заменяются прогнозными значениями, построенными на основе доступной статистики. Таким образом, точность прогноза оптимального отношения хеджирования напрямую зависит от точности эконометрических моделей, применяющихся для прогнозирования условных ковариаций.

Эффективность хеджирования измеряется как выраженное в относительных единицах сокращение безусловной дисперсии дохода инвестора при хеджировании (Ederington, 1979):

$$u(\hat{h_t^*}) = \frac{\mathbb{V}_{t-1}(R_t^u)}{\mathbb{V}_{t-1}(R_t^h)}. \tag{2}$$

Величина данного показателя зависит от точности прогнозирования оптимального отношения хеджирования, а, следовательно, от выбора эконометрической модели для прогноза условных ковариаций. Таким образом, показатель эффективности хеджирования может использоваться для сравнения прогностических способностей этих моделей.

Справедливо заметить, однако, что стратегия минимизации дисперсии дохода плохо описывает поведение реального инвестора, зависящее и от ожидаемого дохода. Учитывая этот факт, можно предложить более реалистичное определение оптимального отношения хеджирования, как такого отношения хеджирования, при котором функция полезности инвестора достигает максимума.

Согласно Brooks, Henry & Persand (2002), для инвестора, характеризуемого функцией полезности вида

$$U(\mathbb{E}_{t-1}(R_t^h), \mathbb{V}_{t-1}(R_t^h)) = \mathbb{E}_{t-1}(R_t^h) - \gamma\mathbb{V}_{t-1}(R_t^h),$$

где γ – отношение инвестора к риску (боязнь риска), а $\mathbb{E}_{t-1}(R_t^h)$ – условное математическое ожидание доходности, оптимальное отношение хеджирования имеет вид:

$$h_t^* = \frac{\mathbb{C}_{t-1}(s_t, f_t)}{\mathbb{V}_{t-1}(f_t)} - \frac{\mathbb{E}_{t-1}(f_t - f_{t-1})}{\gamma\mathbb{V}_{t-1}(f_t)}. \tag{3}$$

Второе слагаемое, появляющееся в правой части, принято интерпретировать как спекулятивный спрос на фьючерсы. Два приведенных определения оптимального отношения хеджирования эквивалентны, если выполнено одно из дополнительных предположений: либо коэффициент γ стремится к бесконечности (инвестор не приемлет никакого риска вообще, вне зависимости от ожидаемого дохода), либо ожидаемый доход по фьючерсам равен нулю. Конечно, данные дополнительные предположения нереалистичны, однако определение, основанное на минимизации дисперсии, является важным и зачастую более удобным для теоретических исследований.

Основной целью данной работы является изучение возможностей применения многомерных GARCH-моделей для оценивания и прогнозирования условных ковариаций на различных финансовых рынках, а не разработка «реальной стратегии», поэтому в дальнейшем используется оптимальное отношение хеджирования, определяемое формулой (1). Такой подход позволяет проще получить представление о том, насколько хорошо та или иная эконометрическая модель описывает эволюцию условных ковариаций между хеджируемыми активами и фьючерсами, исходя из цепочки простых рассуждений, не являющихся, впрочем, строгим математическим доказательством: большее сокращение дисперсии дохода при хеджировании достигается при более точной оценке оптимального отношения хеджирования, а точность оценок оптимального отношения хеджирования повышается с увеличением точности оценок условных ковариаций. Следовательно, эконометрические модели, обеспечивающие большую эффективность хеджирования (в смысле сокращения дисперсии), лучше описывают реальный процесс, генерирующий наблюдаемые значения, и должны обеспечивать и большую точность оценок оптимального отношения хеджирования, определенного при помощи функции полезности. При построении реальной стратегии хеджирования инвестор сможет полагаться на теоретические результаты данного исследования для оценивания ковариационной матрицы и определять оптимальное отношение хеджирования в зависимости от своего отношения к риску по формуле (3).

3 Модели постоянных и динамических условных корреляций

Пусть каждому моменту времени t соответствует случайный двумерный вектор y_t, компонентами которого являются доходности фьючерсного контракта и финансового индекса. Предполагается, что данный векторный случайный процесс $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ имеет вид

$$y_t = \mathbb{E}(y_t|F_{t-1}) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \Sigma_t^{1/2} z_t, \tag{4}$$

где F_{t-1} – вся информация, доступная к моменту времени $t-1$, Σ_t – положительно определенная матрица, $\Sigma_t^{1/2}$ – разложение Холецкого для Σ_t, z_t – независимые одинаково распределенные случайные векторы с $\mathbb{E}(z_t) = 0$ и $\mathbb{V}(z_t) = I$. Тогда

$$\mathbb{V}(y_t|F_{t-1}) = \Sigma_t^{1/2}\mathbb{V}(z_t)(\Sigma_t^{1/2})' = \Sigma_t.$$

Условное математическое ожидание и ковариационная матрица являются функциями от неизвестных параметров и наблюдаемых значений. Дальнейшее моделирование заключается в придании конкретных параметрических форм $\mathbb{E}(y_t|F_{t-1})$ и Σ_t. В данной работе для $\mathbb{E}(y_t|F_{t-1})$ используется классическая векторная модель исправления ошибок, VECM (см. приложение), а для условной ковариационной матрицы – три многомерных GARCH-модели разной степени детализации: модель с постоянными корреляциями и модели симметричной и асимметричной динамики условных корреляций.

Общим для моделей ковариационной матрицы является ее представление в виде произведения:

$$\Sigma_t = D_t R_t D_t,$$

где $R_t = (\rho_{ijt})$ – матрица условных корреляций, а D_t – диагональная матрица с элементами σ_{iit} (корень из условной дисперсии компоненты i, где $i = 1, 2$) на главной диагонали. Положительная определенность матрицы Σ_t обеспечивается положительной определенностью матрицы R_t и положительностью σ_{iit}.

Элементы σ_{iit} являются функциями от параметров и соответствующих компонент вектора ошибок ϵ_t. В общем случае формы процессов σ_{iit} могут быть различны для каждого номера i (для каждого одномерного ряда), но в данной работе все они моделируются как одномерные GARCH.

Простейшей моделью для матрицы R_t является модель постоянных условных корреляций (*Constant Conditional Correlation, CCC*), предложенная Тимом Болерслевым (Bollerslev, 1990), в которой полагается, что матрица R_t постоянна во времени:

$$R_t = R = (\rho_{ij}),$$

Данная модель имеет очевидную интерпретацию и легко оценивается в два шага: сначала находят оценки параметров одномерных GARCH, после чего рассчитывают выборочные ковариации между стандартизированными остатками. Тем не менее, априорное предположение о неизменности условных корреляций часто является необоснованным и может привести к недопустимым неточностям.

Естественным обобщением CCC-модели, допускающим изменение условных корреляций во времени, является модель динамических условных корреляций (*Dynamic Conditional Correlation, DCC*) Роберта Энгла (Engle, 2002). Для обеспечения особой формы корреляционной матрицы (симметричности, единиц на главной диагонали и меньших единицы по модулю недиагональных элементов) R_t представляется в виде

$$R_t = (\mathrm{diag}(Q_t))^{-\frac{1}{2}} Q_t (\mathrm{diag}(Q_t))^{-\frac{1}{2}},$$

где Q_t – положительно определенная симметричная матрица, эволюционирующая в соответствии с процессом

$$Q_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\bar{Q} + \theta_1 u_{t-1} u'_{t-1} + \theta_2 Q_{t-1},$$

где $u_t = [u_{1t}, u_{2t}]'$, $u_{it} = \epsilon_{it}/\sigma_{iit}$ – стандартизированные остатки, $i = 1, 2$, $\bar{Q}$ – безусловная ковариационная матрица u_t.

Для обеспечения положительной определенности матриц R_t и, следовательно, Σ_t, параметры θ_1 и θ_2 должны быть положительны и их сумма не должна превышать единицу (Engle, Sheppard, 2001).

Динамика условных корреляций в DCC-моделях объясняется их зависимостью от предыдущих значений шоков (ошибок), поправленных на волатильность: одинаково направленные остатки ведут к увеличению условных корреляций, разнонаправленные – к уменьшению. Однако не склонные к риску инвесторы скорее реагируют на негативную информацию о рынке, поэтому для более точного описания динамики условных корреляций разумно допустить, что изменение условных корреляций может различаться для положительных и отрицательных значений остатков. Для учета такого эффекта асимметрии динамики используется модификация DCC модели – асимметричная модель динамических условных корреляций (*Asymmetric Dynamic Conditional Correlation, ADCC*).

Различие между DCC- и ADCC-моделями заключается в параметрической форме процесса для матриц Q_t. Для ADCC-матрицы Q_t изменяются в соответствии с уравнением:

$$Q_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\bar{Q} - \theta_3 \bar{N} + \theta_1 u_{t-1} u'_{t-1} + \theta_2 Q_{t-1} + \theta_3 \eta_{t-1} \eta'_{t-1},$$

где $\eta_t = \mathbb{I}\{u_t < 0\} \odot u_t$, $\bar{N} = \mathbb{E}[\theta_t \theta'_t]$, $\odot$ обозначает поэлементное умножение. В данном случае положительная определенность матрицы R_t может быть гарантирована следующими условиями: параметры θ_1, θ_2 и θ_3 неотрицательны, и их сумма меньше единицы. Второе условие может быть заменено менее строгим (Cappiello, Engle & Sheppard, 2006) $\theta_1 + \theta_2 + \delta\theta_3 < 1$, где δ – наибольшее собственное значение матрицы $\bar{Q}^{-\frac{1}{2}}\bar{N}\bar{Q}^{-\frac{1}{2}}$.

Приведенные многомерные GARCH-модели относятся к классу моделей с изменяющимися условными корреляциями. Заметим, что CCC-модель может рассматриваться как DCC при $\theta_1 = \theta_2 = 0$, которая в свою очередь является ADCC-моделью при $\theta_3 = 0$.

4 Способы оценивания параметров

Векторная модель исправления ошибок (условное математическое ожидание) оценивается методом наименьших квадратов (см. Lütkepohl, 2005). Оценивание параметров многомерных GARCH-моделей осуществляется на основе остатков $\hat{\epsilon}_t$, полученных после оценивания условного математического ожидания $E[y_t|F_{t-1}]$.

Предположив некоторый закон распределения для z_t, можно оценить параметры многомерных GARCH-моделей методом максимального правдоподобия. В частности, если $z_t \sim N(0, I_m)$, то логарифм функции правдоподобия (без константы) имеет вид:

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(\ln\det\Sigma_t + \hat{z}_t{}'\Sigma_t^{-1}\hat{z}_t)$$

Вектор θ здесь обозначает вектор всех параметров модели. Точка максимума $\ln L(\theta)$, $\hat{\theta}$, является состоятельной, асимптотически нормальной и эффективной оценкой θ. Если же предположение $z_t \sim N(0, I_m)$ не выполняется, $\hat{\theta}$ следует понимать как оценку методом максимального псевдо- (квази-) правдоподобия, также являющуюся состоятельной и асимптотически нормальной, однако не эффективной.

Большим достоинством многомерных GARCH-моделей с динамическими условными корреляциями является возможность использования для их оценивания двухшаговый метод (Engle, 2002): на первом шаге оцениваются параметры одномерных GARCH, на втором – параметры уравнения динамики условных корреляций. Такой подход облегчает работу с одномерными волатильностями и позволяет избежать численных трудностей, возникающих при оптимизации. Формально он может быть изложен следующим образом: функция правдоподобия

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(\ln\det D_t R_t D_t + \hat{u}_t{}'R_t^{-1}\hat{u}_t), \quad u_t = D_t^{-1}\epsilon_t,$$

может быть представлена в виде суммы:

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(2\ln\det D_t + u_t'u_t) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\ln\det R_t + u_t'R_t^{-1}u_t - u_t'u_t) = \ln L^1(\theta_1) + \ln L^2(\theta_2|\theta_1).$$

Здесь θ_1 и θ_2 обозначают векторы параметров соответственно условных дисперсий (параметры в D_t) и условных корреляций (параметры в R_t). Заметим, что $\ln L^1(\theta_1)$ является функцией правдоподобия совместно для всех одномерных GARCH. На первом шаге оцениваются параметры θ_1:

$$\hat{\theta_1} = \arg\min_{\theta_1}\ln L^1(\theta_1),$$

а на втором – параметры θ_2, используя оценки, полученные на первом шаге:

$$\hat{\theta_2} = \arg\min_{\theta_2}\ln L^2(\theta_2|\hat{\theta}_1),$$

Оценки двухшагового метода $\hat{\theta_1}$ и $\hat{\theta_2}$ можно рассматривать как оценки обобщенного метода моментов (см. Engle & Sheppard, 2001 и Newey & McFadden, 1994). Они состоятельны и асимптотически нормальны, но не эффективны. Их асимптотическое распределение имеет вид:

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow{d} N(0, A_0^{-1}B_0A_0^{-1}),$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} \partial^2 \ln L^1(\theta_1)/\partial\theta_1\partial\theta_1' & 0 \\ \partial^2 \ln L^2(\theta_2)/\partial\theta_1\partial\theta_2' & \partial^2 \ln L^2(\theta_2)/\partial\theta_2\partial\theta_2' \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \mathbb{V}\left[T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\partial \ln L^1(\theta_1)}{\partial\theta_1'}, \frac{\partial \ln L^1(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2'}\right)'\right]$$

5 Описание данных и оценки параметров

Для проведения эмпирического исследования используются исторические дневные значения российского индекса RTS и мировых индексов: DAX, S&P500 (далее S&P) и NASDAQ COMPOSITE (далее NASDAQ) в период с 1 января 2008 г. по 22 июля 2010 г., а также котировки соответствующих фьючерсных контрактов. Обработка данных и процедуры оценки параметров моделей осуществлялись с использованием программы MATLAB.

Индексы RTS, DAX и S&P являются основными показателями, характеризующими соответственно российский, немецкий и американский фондовые рынки. Финансовый индекс NASDAQ является индикатором одной из основных фондовых бирж США, NASDAQ, специализирующейся на торговле акциями высокотехнологичных компаний.

Общее число наблюдений составляет 635 и 668 торговых дней для индексов RTS и DAX, S&P500 и NASDAQ соответственно, причем различие в длине рядов обусловлено различным количеством праздничных нерабочих дней. Для каждого ряда последние 60 пар наблюдений (около трех торговых месяцев) используются для проведения вневыборочного анализа. Описательные статистики рядов данных представлены в таблице 1.

Таблица 1: Описательные статистики

	RTC		DAX		NASDAQ		S&P	
	фьючерс	индекс	фьючерс	индекс	фьючерс	индекс	фьючерс	индекс
mean	$0,00$	$0,00$	$0,00$	$0,00$	$0,00$	$0,00$	$0,00$	$0,00$
med	$0,00$	$0,00$	$0,00$	$0,00$	$0,00$	$0,00$	$0,00$	$0,00$
std	$0,04$	$0,03$	$0,02$	$0,02$	$0,02$	$0,02$	$0,02$	$0,02$
skewness	$-0,40$	$-0,23$	$0,31$	$0,29$	$0,11$	$-0,09$	$0,12$	$-0,14$
kurtosis	$10,87$	$9,91$	$9,08$	$8,19$	$10,17$	$7,02$	$10,30$	$8,17$
max	$0,23$	$0,20$	$0,12$	$0,11$	$0,13$	$0,11$	$0,13$	$0,11$
min	$-0,31$	$-0,21$	$-0,08$	$-0,07$	$-0,11$	$-0,10$	$-0,10$	$-0,09$

В таблице представлены описательные статистики для рядов доходностей индексов (индекс) и соответствующих фьючерсных контрактов (фьючерс). По строкам расположены статистики: mean – среднее значение, med – оценка медианы, std – оценка стандартного отклонения, skewness – коэффициент асимметрии, kurtosis – эксцесс, max – максимальное значение, min – минимальное значение.

Стоит отметить, что коэффициенты асимметрии доходности всех индексов отличны от нуля. Для индексов DAX, NASDAQ и S&P они равны соответственно $0,31$, $0,11$ и $0,12$, а коэффициент асимметрии доходности индекса РТС составляет $-0,23$. Таким образом, у доходности индекса RTS более вероятно появление значений из левого хвоста распределения значений, а для DAX, NASDAQ и S&P – из правого.

Для всех рассматриваемых пар ряды значений индексов и фьючерсных контрактов демонстрируют признаки коинтегрируемости. Для каждой пары построена двумерная модель исправления ошибок. Оценки их параметров и среднеквадратические отклонения оценок представлены в таблице 2.

Количество лагов в VECM выбрано согласно показаниям информационных критериев (Шварца, Акаике, Ханнана–Куина). Для рядов с индексами RTS и DAX оно равно трем, для NASDAQ – двум, и для S&P – одному; таким образом, процессы с индексами RTS и DAX обладают более длинной памятью, чем с индексами NASDAQ и S&P. Оценки коинтегрирующего вектора близки к -1 для всех пар индекс–фьючерс, за исключением пары с индексом NASDAQ. Кроме того, для нее оценки поправочных коэффициентов положительны, в то время как оценки этих параметров для всех остальных пар отрицательны.

Таблица 2: Оценки параметров двумерных VECM

				RTS				
alpha	beta’	A1		A2		A3		const
$-0,430^*$	$1,000$	$0,004$	$0,148$	$-0,175^*$	$0,112$	$-0,115^*$	$0,109$	$-0,027^*$
(0,120)		(0,116)	(0,131)	(0,102)	(0,110)	(0,007)	(0,074)	(0,008)
$0,067$	$-1,008^*$	$0,470^*$	$-0,390^*$	$0,306^*$	$-0,235^*$	$0,073$	$0,014$	$0,000$
(0,083)	(0,005)	(0,080)	(0,091)	(0,071)	(0,076)	(0,053)	(0,051)	(0,006)
				DAX				
alpha	beta’	A1		A2		A3		const
$-0,760^*$	$1,000$	$-0,330$	$0,277$	$-0,338$	$0,272$	$-0,350$	$0,308$	$-0,043$
(0,220)		(0,318)	(0,322)	(0,313)	(0,318)	(0,283)	(0,288)	(0,120)
$-0,641^*$	$-1,007^*$	$0,044$	$-0,112$	$-0,058$	$-0,015$	$-0,062$	$0,010$	$-0,037$
(0,220)	(0,004)	(0,318)	(0,322)	(0,313)	(0,318)	(0,283)	(0,288)	(0,120)
				NASDAQ				
alpha	beta’	A1		A2		A3		const
$0,131^*$	$1,000$	$-0,173$	$0,051$	$-0,412^*$	$0,301^*$	–	–	$0,950^*$
(0,035)		(0,146)	(0,143)	(0,145)	(0,141)			(0,025)
$0,141^*$	$-0,066^*$	$0,219^*$	$-0,330^*$	$-0,253^*$	$0,150$	–	–	$0,026$
(0,036)	(0,031)	(0,148)	(0,146)	(0,148)	(0,144)			(0,026)
				S&P				
alpha	beta’	A1		A2		A3		const
$-1,869^*$	$1,00$	$0,654^*$	$-0,812^*$	–	–	–	–	$-0,107$
(0,287)		(0,251)	(0,256)					(0,160)
$-1,349^*$	$-1,008^*$	$0,813^*$	$-0,986^*$	–	–	–	–	$-0,177$
(0,289)	(0,001)	(0,253)	(0,251)					(0,160)

В таблице представлены оценки параметров двумерных моделей исправления ошибок и их стандартные отклонения (в скобках) для четырех пар индекс–фьючерс. Параметры записаны в виде матриц: alpha – матрица поправочных коэффициентов, beta – стандартизированная матрица коинтегрирующих векторов, A1, A2, A3 – матрицы параметров векторной авторегрессии, const – константы. Значимые на 5% уровне доверия параметры помечены как *.

Для каждой пары индекс-фьючерс построены модели CCC, DCC и ADCC. Таблица 3 содержит оценки параметров двумерных GARCH-моделей и их стандартные ошибки. Альтернативные модели корреляций протестированы одна против другой с помощью критерия отношения правдоподобия. Результаты проверки гипотез представлены в таблице 4.

Оценка постоянного условного коэффициента корреляции CCC-модели для индекса RTS равна 0,862 и существенно меньше аналогичных оценок для других индексов, близких к 1, что свидетельствует о существовании в российской финансовой системе существенного объема информации, по-разному влияющей на фондовый рынок и рынок фьючерсов. Оценки параметров асимметрии ADCC-модели для всех изучаемых пар незначимы на 5% уровне значимости.

Согласно критериям отношения правдоподобия нулевая гипотеза о постоянстве условных корреляций может быть отвергнута при уровне значимости 0,05 для всех изучаемых рядов данных. Нулевая гипотеза о симметричной динамике условных корреляций не может быть отвергнута в пользу альтернативной гипотезы об асимметричной динамике для всех рядов

Таблица 3: Оценки параметров многомерных GARCH-моделей

	RTS			DAX		
	CCC	DCC	ADCC	CCC	DCC	ADCC
const1	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)
delta1	$0,127^*$ (0,001)	$0,127^*$ (0,001)	$0,127^*$ (0,001)	$0,127^*$ (0,001)	$0,127^*$ (0,001)	$0,127^*$ (0,001)
gamma1	$0,872^*$ (0,001)	$0,872^*$ (0,001)	$0,872^*$ (0,001)	$0,872^*$ (0,001)	$0,872^*$ (0,001)	$0,872^*$ (0,001)
const2	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)
delta2	$0,136^*$ (0,001)	$0,136^*$ (0,001)	$0,136^*$ (0,001)	$0,136^*$ (0,001)	$0,136^*$ (0,001)	$0,136^*$ (0,001)
gamma2	$0,854^*$ (0,001)	$0,854^*$ (0,001)	$0,854^*$ (0,001)	$0,854^*$ (0,001)	$0,854^*$ (0,001)	$0,854^*$ (0,001)
corr	$0,862^*$ (0,000)	–	–	$0,995^*$ (0,000)	–	–
theta1	–	$0,029^*$ (0,000)	$0,029^*$ (0,001)	–	$0,185^*$ (0,005)	$0,184^*$ (0,002)
theta2	–	$0,958^*$ (0,000)	$0,950^*$ (0,002)	–	$0,487^*$ (0,088)	$0,487^*$ (0,080)
theta3	–	–	$0,011$ (9,260)	–	–	$0,328$ (4,800)

	NASDAQ			S&P		
	CCC	DCC	ADCC	CCC	DCC	ADCC
const1	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)
delta1	$0,127^*$ (0,001)	$0,127^*$ (0,001)	$0,127^*$ (0,001)	$0,127^*$ (0,001)	$0,127^*$ (0,001)	$0,127^*$ (0,001)
gamma1	$0,872^*$ (0,001)	$0,872^*$ (0,001)	$0,872^*$ (0,001)	$0,872^*$ (0,001)	$0,872^*$ (0,001)	$0,872^*$ (0,001)
const2	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)	$0,000$ (0,000)
delta2	$0,136^*$ (0,001)	$0,136^*$ (0,001)	$0,136^*$ (0,001)	$0,136^*$ (0,001)	$0,136^*$ (0,001)	$0,136^*$ (0,001)
gamma2	$0,854^*$ (0,001)	$0,854^*$ (0,001)	$0,854^*$ (0,001)	$0,854^*$ (0,001)	$0,854^*$ (0,001)	$0,854^*$ (0,001)
corr	$0,972^*$ (0,000)	–	–	$0,987^*$ (0,000)	–	–
theta1	–	$0,069^*$ (0,001)	$0,069^*$ (0,001)	–	$0,063^*$ (0,002)	$0,103^*$ (0,024)
theta2	–	$0,786^*$ (0,013)	$0,786^*$ (0,017)	–	$0,782^*$ (0,043)	$0,000$ (12,025)
theta3	–	–	$0,143^*$ (0,083)	–	–	$0,895^*$ (0,544)

В таблице представлены оценки параметров CCC-, DCC- и ADCC-моделей и их стандартные отклонения (в скобках) для четырех пар индекс–фьючерс. Обозначения параметров: const, delta, gamma – константы, ARCH и GARCH параметры в одномерных GARCH-моделях соответственно, corr – коэффициент корреляции в CCC-модели, theta1, theta2 и theta3 – параметры DCC- и ADCC-моделей. Значимые на 5% уровне параметры помечены как *.

Таблица 4: Тесты отношения правдоподобия

тест	статистика	критические значения		
RTS				
H_0/H_1	LR	0,10	0,05	0,01
CCC/DCC	7,60	4,61	5,99	9,21
DCC/ADCC	2,69	2,71	3,84	6,63
DAX				
тест	статистика	критические значения		
H_0/H_1	LR	0,10	0,05	0,01
CCC/DCC	82,53	4,61	5,99	9,21
DCC/ADCC	−0,65	2,71	3,84	6,63
NASDAQ				
тест	статистика	критические значения		
H_0/H_1	LR	0,10	0,05	0,01
CCC/DCC	15,08	4,61	5,99	9,21
DCC/ADCC	1,34	2,71	3,84	6,63
S&P				
тест	статистика	критические значения		
H_0/H_1	LR	0,10	0,05	0,01
CCC/DCC	6,84	4,61	5,99	9,21
DCC/ADCC	0,74	2,71	3,84	6,63

В таблице представлены результаты проверки гипотез CCC против DCC (CCC/DCC) и DCC против ADCC (DCC/ADCC) с помощью критериев отношения правдоподобия, статистики тестов (LR) и критические значения.

при уровне значимости 0,10.

К сожалению, мощность тестов отношения правдоподобия может быть существенно снижена из-за потенциально неверной спецификации одномерных GARCH-моделей или неверной параметрической формы уравнения динамики условных корреляций. Поэтому для тестирования нулевой гипотезы о постоянстве условных корреляций против динамических условных корреляций используется также тест, предложенный в Engle & Sheppard (2001), основанный лишь на состоятельных оценках CCC-модели: если нулевая гипотеза верна, стандартизированные остатки $\hat{u}_t = \hat{R}^{-\frac{1}{2}} D_t^{-1} \hat{\epsilon}_t$ представляют собой последовательность независимых одинаково распределенных величин, и, следовательно, параметры в авторегресии векторного произведения стандартизированных остатков должны быть равны нулю. Результаты тестирования приводятся в таблице 5.

Тестирование показало, что для разного количества лагов вспомогательной регрессии вероятность отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что она верна, значительно различается. С большой степенью уверенности можно отклонить гипотезу о постоянстве условных корреляций для ряда доходностей индексов и фьючерсов DAX, и принять ее для ряда индексов и фьючерсов RTS и NASDAQ.

6 Результаты хеджирования

Анализ показывает, что применение для расчета отношений хеджирования оценок ковариаций, основанных на более детализированных моделях, DCC и ADCC, приводит к незначительному увеличению качества хеджей внутри исходной выборки и уменьшению при прогнозировании для индексов DAX, NASDAQ и S&P, а для индекса RTS – напротив, эффективность DCC-хеджа растет при прогнозировании. Отношение выборочной оценки диспер-

Таблица 5: Тесты на постоянство условных корреляций

	nlags	sta	p-value
RTS	2	$1,92$	$0,59$
	5	$2,65$	$0,85$
	10	$4,70$	$0,94$
DAX	2	$41,84$	$0,00$
	5	$63,45$	$0,00$
	10	$64,84$	$0,00$
NASDAQ	2	$0,21$	$0,98$
	5	$3,53$	$0,74$
	10	$6,10$	$0,87$
SP	2	$4,01$	$0,26$
	5	$5,98$	$0,42$
	10	$19,22$	$0,06$

В таблице приводятся результаты тестов на постоянство условных корреляций. По столбцам справа налево расположены: наименование ряда, количество лагов вспомогательной регрессии, используемой в тесте (nlags), статистика теста (sta) и достигаемый уровень значимости (p-value).

сии доходности нехеджированной позиции к оценке дисперсии доходности хеджированной варьируется от 44,997 (при хеджировании индекса DAX с помощью DCC) до 1,637 (при хеджировании индекса RTS с помощью ADCC) внутри выборки и от 75,139 (при хеджировании индекса DAX с помощью CCC) до 1,881 (при хеджировании индекса RTS с помощью ADCC) вне выборки.

Лучшими для хеджирования вне исходной выборки индексов NASDAQ, DAX и S&P оказались модели постоянных условных корреляций, а для хеджирования индекса RTS – модель динамических условных корреляций. Относительное изменение дисперсии дохода хеджей при переходе от одной модели к другой является незначительным для индекса RTS: отношения оценок дисперсий составляют 1,012 (отношение оценки дисперсии DCC-хеджа к оценке дисперсии CCC-хеджа) и 0,851 (отношение оценки дисперсии ADCC-хеджа к оценке дисперсии CCC-хеджа). А для индексов NASDAQ, DAX и S&P наблюдается существенное снижение качества хеджей при переходе на DCC и ADCC модели.

Таким образом, существенного улучшения качества хеджей при детализации эконометрических моделей не наблюдается. Подобные эффекты присущи громоздким моделям, требующим оценивания слишком многих параметров, и объясняются накапливающейся неточностью оценок. Способность тестов выявлять наиболее адекватную для описания данных модель ослабляется по аналогичным причинам.

Сокращение дисперсии позиции при хеджировании как внутри, так и вне исходной выборки заметно выше для американского и немецкого рынков. Данное наблюдение объясняется более тесной связью между индексами и фьючерсными контрактами на этих развитых рынках, обусловленной высокой ликвидностью, быстротой реакции фьючерсного рынка на поведение спот-рынка, меньшим количеством спекулятивных сделок.

Для иллюстрации вневыборочных хеджей для всех пар индекс–фьючерс на Рис. 1 показаны оцененные методом ядерного сглаживания плотности распределения доходностей нехеджированных и хеджированных инвестиций, причем оценки плотностей распределений хеджей рассчитываются на основе лучших (в смысле показателя отношения дисперсий) моделей.

Таблица 6: Относительные изменения оценок дисперсий доходностей при хеджировании

Внутривыборочный анализ					
RTS			DAX		
u(CCC)	u(DCC)	u(ADCC)	u(CCC)	u(DCC)	u(ADCC)
1,646	1,639	1,637	44,668	44,997	44,973
CCC/CCC	DCC/CCC	ADCC/CCC	CCC/CCC	DCC/CCC	ADCC/CCC
1,000	0,996	0,995	1,000	1,007	1,007
NASDAQ			S&P		
u(CCC)	u(DCC)	u(ADCC)	u(CCC)	u(DCC)	u(ADCC)
13,360	13,438	13,435	30,084	30,097	29,980
CCC/CCC	DCC/CCC	ADCC/CCC	CCC/CCC	DCC/CCC	ADCC/CCC
1,000	1,006	1,006	1,000	1,000	0,997
Вневыборочный анализ					
RTS			DAX		
u(CCC)	u(DCC)	u(ADCC)	u(CCC)	u(DCC)	u(ADCC)
2,211	2,238	1,881	75,139	9,300	14,840
CCC/CCC	DCC/CCC	ADCC/CCC	CCC/CCC	DCC/CCC	ADCC/CCCC
1,000	1,012	0,851	1,000	0,124	0,197
NASDAQ			S&P		
u(CCC)	u(DCC)	u(ADCC)	u(CCC)	u(DCC)	u(ADCC)
28,487	16,473	9,249	48,586	27,776	43,881
CCC/CCC	DCC/CCC	ADCC/CCC	CCC/CCC	DCC/CCC	ADCC/CCC
1,000	0,578	0,325	1,000	0,572	0,903

В таблице представлены отношения оценок дисперсий доходностей нехеджированных инвестиций к оценкам дисперсий хеджированных, построенных с помощью CCC (u(CCC)), DCC (u(DCC)) и ADCC (u(ADCC)) моделей, и отношения оценок дисперсий всех хеджей к оценке дисперсии CCC-хеджа (CCC/CCC, CCC/DCC, CCC/ADCC).

Для всех индексов распределения доходностей хеджей сконцентрированы вокруг нуля, и разброс их значений меньше разброса значений доходов нехеджированных инвестиций. Доход хеджа индекса RTS имеет наибольшую дисперсию среди всех рассматриваемых индексов.

В таблице 7 представлены статистики, характеризующие ряды оценок оптимальных отношений хеджирования, полученных для каждой пары индекс-фьючерс на основе моделей CCC, DCC и ADCC. Характерные отличия оценок отношений хеджирования, полученных на основе разных моделей, одинаковы для всех изучаемых индексов. Ряды оценок оптимальных отношений хеджирования демонстрируются на Рис. 2.

Оценки оптимальных отношений хеджирования, основанные на моделях ADCC и DCC, всегда меньше оценок, основанных на модели с постоянными условными корреляциями. Учитывая, что CCC-хедж является лучшим для почти всех рассматриваемых индексов, можно утверждать, что хеджи с динамическими корреляциями недооценивают истинные оптимальные отношения хеджирования.

7 Заключение

Приведенное исследование показывает, что многомерные GARCH-модели с динамическими условными корреляциями, DCC и ADCC, не способны ощутимо улучшить оценки оптимальных динамических отношений хеджирования по сравнению с простыми моделями с неизменными условными корреляциями, CCC. Учитывая показания тестов на постоянство условных корреляций, можно утверждать, что CCC-модели являются лучшей аппроксимацией для процесса условных корреляций, чем страдающие из-за неправильной спецификации

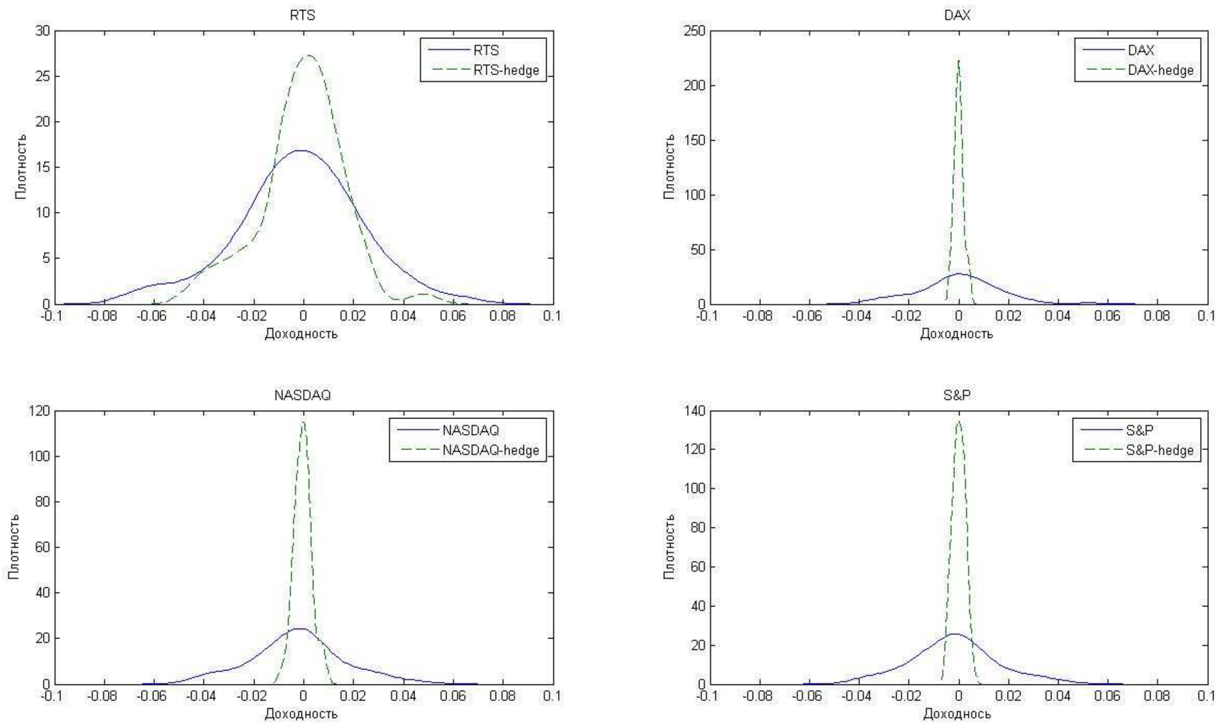

Рис. 1: Распределения доходностей хеджированных и нехеджированных инвестиций

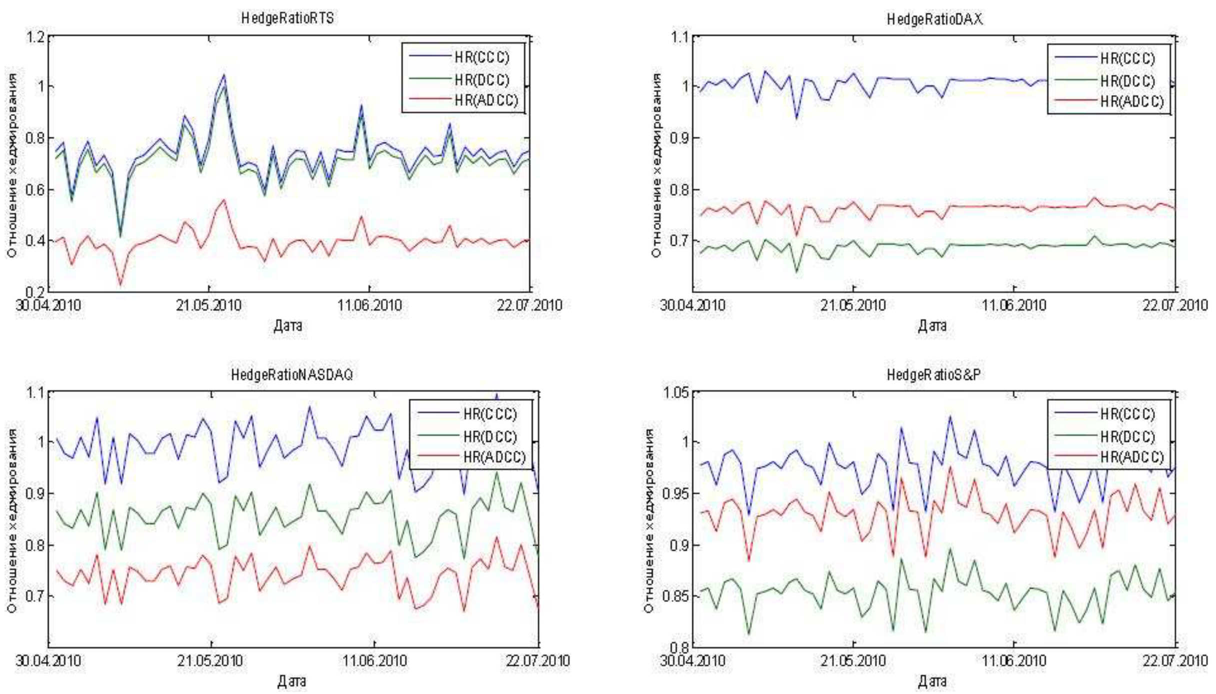

Рис. 2: Динамика отношений хеджирования

и накопления ошибок при оценивании параметров модели DCC и ADCC, недооценивающие истинные оптимальные отношения хеджирования.

Тем не менее, хеджи, основанные на CCC-моделях, позволяют существенно сократить дисперсии финансовых позиций по индексам, по крайней мере, на развитых финансовых рынках – немецком и американском.

Для российского рынка и специализированного индекса NASDAQ сконструированные хеджи относительно менее эффективны. Модели CCC, DCC и ADCC, управляющие динамикой условных корреляций лишь несколькими параметрами, оказываются недостаточно гибкими для исчерпывающего описания процесса, а использование более громоздких моделей рискованно в связи с уже отмеченной проблемой накопления неточностей и не может гарантировать значительное сокращение дисперсии хеджированной позиции.

Приложение. Коинтеграция и векторные модели исправления ошибок

Одномерные ряды значений финансовых индексов и соответствующих фьючерсных контрактов почти всегда оказываются нестационарными, а их флуктуации часто демонстрируют наличие устойчивых долгосрочных соотношений между рядами. Для формального описания таких рядов используются понятие о коинтеграции и векторные модели исправления ошибок (*Vector Error Correction Models, VECM*).

Двумерный нестационарный случайный процесс y_t называется коинтегрируемым, если существует вектор $\beta \in \mathbb{R}^2$ такой, что процесс $\beta' y_t$ стационарен, т.е. существует линейная комбинация компонент вектора y_t, являющаяся стационарным процессом. Данная линейная комбинация интерпретируется как долгосрочное равновесие (*long-run equilibrium*), устойчивое отношение между компонентами ряда, которое в каждый конкретный момент времени может и не выполняться точно, но равняться случайным величинам, последовательность которых стационарна. Вектор β называют коинтегрирующим вектором (*cointegrating vector*).

Основываясь на понятии о коинтеграции, можно предложить следующую модель временного ряда:

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + \mu + \Gamma_1 \Delta y_{t-2} + \cdots + \Gamma_p \Delta y_{t-p} + u_t,$$

где u_t – последовательность мартингал-разностей относительно естественной фильтрации, $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $i = 1, \ldots, p$, $\mu \in \mathbb{R}^2$ – матрицы параметров, $\alpha \in \mathbb{R}^2$ – вектор параметров, и β – коинтегрирующий вектор. Величина $\beta' y_t$ выражает отклонение от долгосрочного равновесия в момент t, параметр α показывает скорость возвращения системы к состоянию равновесия. Сумма $\mu + \Gamma_1 \Delta y_{t-2} + \cdots + \Gamma_p \Delta y_{t-p}$ интерпретируется как краткосрочные колебания.

Состоятельные оценки параметров VECM можно получить методом наименьших квадратов, но они имеют нестандартное асимптотическое распределение. На втором шаге можно получить суперсостоятельную оценку коинтегрирующего вектора обобщенным методом наименьших квадратов.

Более общее определение коинтеграции и подробное обсуждение VECM, оценивания их параметров и диагностики можно найти в книге Lütkepohl (2005).

Список литературы

Bystrom, H.N.E. (2003). The hedging performance of electricity futures on the Nordic power exchange. *Applied Economics* 35, 1–11.

Bollerslev, T., R.F. Engle & J.M. Wooldridge (1988). A capital asset pricing model with time varying covariances. *Journal of Political Economy* 96, 116–131.

Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short–run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model. *Review of Economics and Statistics* 52, 5–59.

Brooks, C., O.T. Henry & G. Persand (2002). The effect of asymmetries on optimal hedge ratios. *Journal of Business* 75, 333–352.

Cappiello, L., R.F. Engle & K. Sheppard (2006). Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns. *Journal of Financial Econometrics* 4, 537–572.

Ederington, L.H. (1979). The hedging performances of the new futures markets. *Journal of Finance* 34, 157–170.

Engle, R.F. & K.F. Kroner (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory* 11, 122–150.

Engle, R.F. & K. Sheppard (2001). Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH. *NBER Working Paper 8554*.

Engle, R.F. (2002). Dynamic conditional correlation. A simple class of multivariate GARCH models. *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 339–350.

Ghosh, A. (1993). Hedging with stock index futures: Estimation and forecasting with error correction model. *Journal of Futures Markets* 13, 743–752.

Hull, J. (2006). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Шестое издание. Prentice–Hall: Englewood Cliffs, NJ.

Johnson, L.L. (1960). The theory of hedging and speculation in commodity futures. *Review of Economic Studies* 27, 139–151.

Lee, H.T. & J.K. Yoder (2007). Optimal hedging with a regime–switching time–varying correlation GARCH model. *The Journal of Futures Markets* 27, 495–516.

Lien, D., Y.K. Tse & A.K.C. Tsui (2002). Evaluating the hedging performance of the constant–correlation GARCH model. *Applied Financial Economics* 12, 791–798.

Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer–Verlag: Berlin.

Myers, R.J. & S.R. Thompson (1989). Generalized optimal hedge ratio estimation. *American Journal of Agricultural Economics* 71, 858–867.

Newey, W.K. & D.L. McFadden (1994). Large sample estimation and hypothesis testing. Глава 36 в *Handbook of Econometrics* (под редакцией R. Engle & D. McFadden), том 4, 2111–2245. Elsevier Science.

Park, H. & A. Bera (1987). Interest rate volatility, basis, and heteroscedasticity in hedging mortgages. *American Real Estate and Urban Economics Association* 15, 79–97.

Skintzi, V.D. & S. Xanthopolous–Sisinis (2007). Evaluation of correlation forecasting models for risk management. *Journal of forecasting* 26, 497–526.

Tse, Y. & A. Tsui (2002). A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time–varying correlations. *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 351–362.

Yang, W. & D. Allen (2004). Multivariate GARCH hedge ratios and hedging effectiveness in Australian futures markets. *Accounting and Finance* 45, 301–321.

Futures hedging: Multivariate GARCH with dynamic conditional correlations

Alexei Kolokolov

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia
University of Rome “Tor Vergata”, Rome, Italy

This article studies modeling dependence between futures and spot prices of financial indices and verifies a practical value of econometric models for futures hedging using Russian and foreign data. The dynamics of futures and spot prices is described by an error correction model, while volatilities and correlations are modeled by various multivariate GARCH models with dynamic conditional correlations of different degree of detail. The empirical investigation carried out in the article can answer questions on effectiveness of hedging strategies based on multivariate GARCH models, on similarities and differences of dependencies between futures and basic assets in Russian and foreign financial markets, and on a reasonable degree of detail in multivariate GARCH modeling.

Keywords: futures, hedging, multivariate GARCH models, dynamic conditional correlations

JEL Classification: C32, C51, C53, G11, G15