Эконометрический ликбез: волатильность

Оценивание мер волатильности на данных высокой частотности*

Илзе Кальниня†

Университет Монреаля, Монреаль, Канада

Наталья Сизова‡

Университет Райса, Хьюстон, США

Благодаря всё большей доступности данных высокой частотности, например, внутридневных данных, возникло новое направление в измерении волатильности. Новые методы включают в себя непараметрическое оценивание волатильности с построением её прогнозов, ковариационных матриц, мгновенной волатильности, а также части волатильности, связанной со скачками. Настоящее эссе представляет собой обзор методов измерения волатильности, в том числе для данных ультравысокой частотности с микроструктурными искажениями. Включено также обсуждение проблем, возникающих при оценивании мер волатильности на несинхронизированных данных.

1 Введение: после GARCH

Bollerslev (1986) в своей знаменитой статье ввел в обращение модель GARCH для оценивания и прогнозирования волатильности временных рядов в экономике. Особенно частое применение модели GARCH можно встретить в финансовой литературе по управлению рисками и оптимизации инвестиций. Тем не менее, именно для финансовых данных времена GARCH как главного инструмента оценивания волатильности, возможно, уходят в прошлое.[1] Причина заключается во всё большей доступности внутридневных данных, то есть данных в течение биржевого дня. Оценка GARCH волатильности в значительной мере определяется прошлой информацией и потому реагирует на изменения с запаздыванием. Новые методы, разработанные специально дла работы с внутридневными данными, позволяют синхронизировать оценки волатильности с изменениями в самой волатильности.

Для простоты изложения в настоящем эссе мы будем предполагать, что наблюдения являются ценами на акцию некоторой компании. Однако методы, предложенные здесь, применимы для любых временных данных с динамикой семимартингала, см. определение в Protter (1992).

Основная часть данного эссе (раздел 2) определяет основные меры волатильности на данных высокой частотности (5–15 минут). Разделы 3 и 4 касаются проблем определения мер волатильности на данных с ультравысокой частотностью, таких как рыночный микроструктурный шум и несинхронность наблюдений. Раздел 5 посвящён построению прогнозов волатильности на базе введённых мер волатильности.

---

*Цитировать как: Кальниня, Илзе & Наталья Сизова (2015) «Оценивание волатильности на данных высокой частотности», Квантиль, №13, стр. 3–14. Citation: Kalnina, Ilze & Natalia Sizova (2015) “Estimation of volatility measures using high frequency data,” Quantile, No.13, pp. 3–14.

†Адрес: Department of Economics, Université de Montréal, 3150 Jean-Brillant, Montréal, Québec, H3T 1N8. Электронная почта: *ilze.kalnina@umontreal.ca*

‡Адрес: Department of Economics, Rice University, Baker Hall, room 253, Houston, TX 77251. Электронная почта: *natalia.sizova@rice.edu*

[1]GARCH по-прежнему остается важным инструментом для моделирования динамики цен.

2 Меры волатильности на данных высокой частотности

Допустим, наша цель — определить волатильность логарифма цены на акцию s_τ в течение торгового дня $\tau \in [t, t+1]$. Записываем текущие цены в течение дня на равных промежутках: $s_t, s_{t+h}, s_{t+2h}, ..., s_{t+1}$, где $h = 1/N$, и N является числом наблюдений за день. Например, $N = 78$ для индекса NYSE (Нью-Йоркской фондовой биржи) с 6,5-часовым торговым днем, если данные считываются каждые 5 минут. Для получения асимптотических результатов предположим, что $N \to \infty$. То есть, нам понадобится модель для $\{s_{t+\frac{i}{N}}\}_{i=0}^{N}$ при любом большом числе N, то есть модель в непрерывном времени.

Основополагающим теоретическим требованием к динамике цен на акции является отсутствие возможности арбитража — наличие торговой стратегии, приносящей дополнительную прибыль без дополнительного риска. Это правило накладывает ограничение на модель для s_τ (Fundamental Theorem of Asset Pricing). Например, в классе моделей с непрерывной динамикой существует всего одна возможная модель для s_τ, модель диффузии:

$$ds_\tau = \mu_\tau d\tau + \sigma_\tau dB_\tau, \tag{1}$$

где процесс B_τ является стандартным Броуновским движением,[2] а процессы μ_τ и σ_τ любыми càdlàg (непрерывными справа, конечными слева) процессами. В результате, в любой момент τ условная модель для $s_{\tau+\Delta\tau}$, $\Delta\tau \approx 0$ примерно соответствует нормальному распределению $N(s_\tau + \mu_\tau \Delta\tau, \sigma_\tau^2 \Delta\tau)$. То есть, σ_τ определяет мгновенную волатильность процесса s_τ и поэтому называется либо мгновенной (instantaneous), либо точечной (spot) волатильностью.

Дневная волатильность из GARCH модели в наиболее общей интерпретации является условной дисперсией $\mathbb{V}_t(s_{t+1} - s_t)$, то есть с точки зрения ожидания по состоянию на предыдущий день.[3] С внутридневными данными аналогичная дневная волатильность будет определяться как $IV_{t,t+1} = \int_{\tau=t}^{t+1} \sigma_\tau^2 d\tau$, **интегральная волатильность**, и мы сможем оценить непосредственно $IV_{t,t+1}$, а не условный прогноз $\mathbb{E}_t IV_{t,t+1}$. Чтобы интуитивно понять важность этого результата, предположим, что процессы μ_τ и σ_τ остаются постоянными в течение дня, то есть $\sigma_\tau = \sigma_t, \tau \in [t, t+1)$. Из модели GARCH мы получаем оценку прогноза $\mathbb{E}_{t-1}\sigma_t^2$.[4] Из внутридневных данных мы получаем оценку самой σ_t^2. Мы опишем метод оценивания $IV_{t,t+1}$ на примере модели (1), а затем обсудим более широкую применимость этого результата.

Разделим день t на N равных промежутков $(n = 1, ..., N)$ с соответствующими доходностями на акцию $y_n = s_{t+nh} - s_{t+(n-1)h}$ и волатильностями $iv_n = IV_{t+(n-1)h, t+nh}$. Так как

$$s_{t+nh} \sim N(s_{t+(n-1)h} + \mu_{t+(n-1)h} h, \sigma_{t+(n-1)h}^2 h),$$

то

$$y_n^2 = \mu_{t+(n-1)h}^2 h^2 + 2h\mu_{t+(n-1)h}\sigma_{t+(n-1)h} u_{t+nh}\sqrt{h} + h\sigma_{t+(n-1)h}^2 u_{t+nh}^2,$$

где u_{t+nh} распределена примерно как стандартно-нормальная величина $N(0,1)$ независимо от прошлых наблюдений σ_τ и s_τ для всех $\tau \le t + (n-1)h$. Поэтому $u_{t+nh}\sqrt{h} \approx B'_{t+nh} - B'_{t+(n-1)h}$, где B'_τ – некоторый стандартный Броуновский процесс.

Определим **реализованную волатильность** как сумму квадратов изменений цены акции:

$$RV_{t,t+1} = \sum_{n=1}^{N} (s_{t+nh} - s_{t+(n-1)h})^2 = \sum_{n=1}^{N} y_n^2, \tag{2}$$

---

[2] Стандартное Броуновское движение определяется как непрерывный процесс с приращениями $B_{t_2} - B_{t_1}$, распределенными нормально $N(0, t_2 - t_1)$ и независимо от прошлых наблюдений B_τ, $\tau \le t_1$.

[3] Для иллюстрации приведем простую версию модели GARCH: $s_{t+1} - s_t = \tilde{\mu} + \sigma_t z_{t+1}$, $\sigma_t^2 = \tilde{\omega} + \tilde{\alpha}\sigma_{t-1}^2 + \tilde{\beta}(s_t - s_{t-1})^2$, где z_{t+1} является переменной с нулевым условным ожиданием $\mathbb{E}_t z_{t+1} = 0$ и единичной условной дисперсией $\mathbb{V}_t z_{t+1} = 1$. То есть, $\mathbb{V}_t(s_{t+1} - s_t) = \sigma_t^2$.

[4] Исключение составляет случай, когда $\mathbb{E}_{t-1}\sigma_t^2$ совпадает с σ_t^2.

и покажем, что $RV_{t,t+1} \to^p IV_{t,t+1}$, то есть $RV_{t,t+1}$ является состоятельной оценкой дневной волатильности цен. Разложим:

$$\begin{aligned} RV_{t,t+1} - IV_{t,t+1} = \sum_{n=1}^{N}(y_n^2 - iv_n) \approx \left(\sum_{n=1}^{N} \mu^2_{t+(n-1)h} h\right) h \\ + 2\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_{t+(n-1)h}\sigma_{t+(n-1)h}(B'_{t+nh} - B'_{t+(n-1)h})\right) h \\ + \left(\sum_{n=1}^{N} \sigma^2_{t+(n-1)h}\sqrt{h}(u^2_{t+nh} - 1)\right)\sqrt{h} + \sum_{n=1}^{N}(\sigma^2_{t+(n-1)h}h - iv_n). \end{aligned}$$

Суммы

$$\sum_{n=1}^{N} \mu^2_{t+(n-1)h} h \to^p \int_{\tau=t}^{t+1} \mu^2_{\tau-} d\tau$$

и

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_{t+(n-1)h}\sigma_{t+(n-1)h}(B'_{t+nh} - B'_{t+nh-1}) \to^p \int_{\tau=t}^{t+1} \mu_{\tau-}\sigma_{\tau-} dB'_\tau$$

сходятся, поэтому при умножении на $h = 1/N \to 0$ они стремятся к нулю. Третья сумма $\sum_{n=1}^{N} \sigma^2_{t+(n-1)h}\sqrt{h}(u^2_{t+nh} - 1)$ сходится по распределению[5], поэтому при умножении на $\sqrt{h}$ тоже стремится к нулю. Последний член равен $\sum_{n=1}^{N}(\sigma^2_{t+(n-1)h}h - iv_n) = \sum_{n=1}^{N}\int_{\tau=0}^{h}(\sigma^2_{t+(n-1)h} - \sigma^2_{t+(n-1)h+\tau})d\tau$. Из непрерывности слева и конечности справа на интервале $[t, t+1]$ процесса σ^2_τ мы получаем, что $|\sum_{n=1}^{N}\int_{\tau=0}^{h}(\sigma^2_{t+(n-1)h} - \sigma^2_{t+(n-1)h+\tau})d\tau| \to 0$ при $N \to \infty$.

Также были предложены другие меры волатильности, главным образом потому, что непрерывная модель (1) не совсем точно описывает динамику цен акций. Например, если динамика цены на акцию разрывна, то есть подвержена резким переходам (разрывам, скачкам), то мы можем раздельно оценить волатильность непрерывных изменений и волатильность скачков. Почему такое разделение полезно? Например, при прогнозировании волатильности компоненты могут нести разную информацию о будущей динамике. Волатильность непрерывной части мало изменяется от одного дня к другому, при этом волатильность от резкого перехода цен может и не отразиться на волатильности следующего дня или, наоборот, может дать толчок к периоду с более высокой волатильностью. Поэтому определяется ещё одна мера волатильности — **вариация второй степени**:

$$BV_{t,t+1} = \frac{\pi}{2}\frac{N}{N-1}\sum_{n=2}^{N}|s_{t+nh} - s_{t+(n-1)h}||s_{t+(n-1)h} - s_{t+(n-2)h}|. \tag{3}$$

При разрыве в динамике цены $RV_{t,t+1}$, как и прежде, описывает полную волатильность цен, а $BV_{t,t+1}$ только непрерывную ее часть. Например, если в дополнение к динамике (1) произошел скачок в ценах величиной Δ_s, то $BV_{t,t+1} \to^p \int_{\tau=t}^{t+1}\sigma^2_\tau d\tau$ и $RV_{t,t+1} \to^p \int_{\tau=t}^{t+1}\sigma^2_\tau d\tau +$

[5]Заметим, что если $\tilde{B}_h(\tau)$ — процесс с приращениями $\tilde{B}_h(t+nh) - \tilde{B}_h(t+nh-h) = \sqrt{h}\tilde{u}_n$, где величины $\tilde{u}_n$, $n = 1, .., 1/h$ независимо одинаково распределены, $\mathbb{E}u_n = 0$ и $\mathbb{E}u_n^2 = 1$, то $\tilde{B}_h(\tau)$ сходится по распределению к стандартному Броуновскому движению: $\tilde{B}_h(\tau) \to^d \tilde{B}(\tau)$. В нашем случае $\tilde{u}_n = u^2_{t+nh} - 1$, поэтому $\sum_{n=1}^{N}\sigma^2_{t+(n-1)h}\sqrt{h}(u^2_{t+nh} - 1) \to^d \int_{\tau=0}^{1}\sigma^2_{t-}d\tilde{B}(\tau)$.

Δ_s^2. Интуитивно, если скачок Δ_s произошел в момент τ_s, то $(s_{\tau_s} - s_{\tau_s-h})^2 \to \Delta_s^2$, но $|s_{\tau_s} - s_{\tau_s-h}||s_{\tau_s-h} - s_{\tau_s-2h}| \to 0$.[6]

Разделение волатильности на разрывную и непрерывную части может, например, осуществляться следующим способом (см. Andersen, Bollerslev & Huang, 2011). Во-первых, определяются дни, в течение которых произошел разрыв в динамике цен, и вводится соответствующий индикатор $J_{t,t+1}$ для каждого интервала $(t, t+1]$. Если цены наблюдались бы непрерывно, а не только в момент совершения сделок, то разрывы $(J_{t,t+1})$ тоже бы наблюдались. В реальных же условиях используются оценки. Например, следующая статистика основана на свойстве, что $RV_{t,t+1} \approx BV_{t,t+1}$ в отсутствие разрывов:

$$Z_{t,t+1} = \frac{1 - BV_{t,t+1}/RV_{t,t+1}}{\sqrt{\frac{1}{N}\left((\pi/2)^2 + \pi - 5\right)\max\left(1, \frac{TQ_{t,t+1}}{BV_{t,t+1}}\right)}},$$

$$TQ_{t,t+1} = K_{tq}\frac{N^2}{N-6}\sum_{n=5}^{N}|y_{n-4}|^{4/3}|y_{n-2}|^{4/3}|y_n|^{4/3},$$

$$\hat{J}_{t,t+1} = \begin{cases} 1 & \text{если } Z_{t,t+1} > \bar{Z} \\ 0 & \text{если } Z_{t,t+1} \leq \bar{Z} \end{cases},$$

где константа K_{tq} задается через моменты стандартной нормальной величины:

$$K_{tq} = \left(\mathbb{E}|N(0,1)|^{4/3}\right)^{-3} \approx 1,75.$$

Распределение Z_t сходится к стандартно-нормальному при $N \to \infty$ и $BV_{t,t+1}/RV_{t,t+1} \to 1$. Поэтому при пороговом значении $\bar{Z} = 2,326$ погрешность метода составляет примерно 1%.

Во-вторых, волатильность разделяется на две части: **непрерывную** $CV_{t,t+1}$ и **волатильность разрывов** $JV_{t,t+1}$:

$$RV_{t,t+1} = CV_{t,t+1} + JV_{t,t+1},$$

где

$$CV_{t,t+1} = \begin{cases} RV_{t,t+1} & \text{если } \hat{J}_{t,t+1} = 0, \\ BV_{t,t+1} & \text{если } \hat{J}_{t,t+1} = 1, \end{cases} \quad JV_{t,t+1} = \begin{cases} 0 & \text{если } \hat{J}_{t,t+1} = 0, \\ RV_{t,t+1} - BV_{t,t+1} & \text{если } \hat{J}_{t,t+1} = 1. \end{cases}$$

Далее в моделях волатильности $CV_{t,t+1}$ и $JV_{t,t+1}$ могут использоваться раздельно.

Меры, аналогичные $RV_{t,t+1}$, используются также в многомерных приложениях. Например, при оптимизации инвестиций необходимо рассчитать матрицу ковариаций $V_{t,t+1}$ для нескольких акций, $p_t = (s_{1,t}, .., s_{M,t})'$. В этом случае применимы похожие результаты, например, следующая оценка:

$$\widehat{V}_{t,t+1} = \sum_{n=1}^{N}(p_{t+nh} - p_{t+(n-1)h})(p_{t+nh} - p_{t+(n-1)h})'. \tag{4}$$

Этим методом мы можем определить реализованные корреляции за каждый день. Но важно отметить ограничения этого метода в многомерных моделях: результаты с условием $N \to \infty$

[6] Заметим, что свойство $|s_{\tau_s} - s_{\tau_s-h}||s_{\tau_s-h} - s_{\tau_s-2h}| \to 0$ выполняется только при $N \to \infty$. В малых выборках величина $|s_{\tau_s} - s_{\tau_s-h}||s_{\tau_s-h} - s_{\tau_s-2h}|$ влияет на $BV_{t,t+1}$. Для уточнения оценки волатильности без учёта скачков были предложены следующие методы: усечённая $RV_{t,t+1}$ (Mancini, 2009), усечённая $BV_{t,t+1}$ (Corsi, Pirino и Reno, 2010), minRV и medRV (Andersen, Dobrev & Schaumburg, 2012) и квантильная $RV_{t,t+1}$ (Christensen, Oomen & Podolskij, 2010).

позволяют дать точную оценку корреляции $s_{j,t_2} - s_{j,t_1}$ и $s_{i,t_2} - s_{i,t_1}$, $i \neq j$, $t_1 < t_2$, но не, например, реакции $s_{j,t_2} - s_{j,t_1}$ на $s_{i,t_1} - s_{i,t_0}$, $i \neq j$, $t_0 < t_1 < t_2$. То есть, асимптотика с $N \to \infty$ позволяет оценить только взаимоотношения между одновременными изменениями.

Наконец, в случае, если вместо интегральной волатильности $IV_{t,t+1}$ нам интересно измерение волатильности в конкретный момент времени, то мгновенную волатильность σ_t^2 можно оценить с помощью **локальной реализованной волатильности**. Локальная реализованная волатильность определяется как реализованная волатильность на «малом» интервале времени $[t, t + k_N h]$, поделенная на длину этого интервала:

$$\widehat{\sigma}_\tau^2 = \frac{1}{k_N h} \sum_{n=1}^{k_N} \left(s_{t+nh} - s_{t+(n-1)h}\right)^2,$$

$\tau \in (t, t + k_N h)$, где k_N является числом наблюдений в интервале $[t, t + k_N h]$. При условиях $k_N \to \infty$ и $k_N h \to \infty$, оценка $\widehat{\sigma}_\tau^2$ сходится к σ_τ^2. В случае присутствия разрывов в динамике цен s_t локальная реализованная волатильность заменяется на другие меры волатильности, например, локальную вариацию второй степени $BV_{t,t+k_N h}$ или усеченную реализованную волатильность, см. Lee & Mykland (2008), Jacod & Rosenbaum (2012). Асимптотические свойства локальных мер волатильностей рассмотрены в Kristensen (2010).

3 Оценивание волатильности на данных с ультравысокой частотностью. Микроструктурный шум

Заметим, что меры волатильности из предыдущей главы применимы при условии отсутствия арбитража[7]. Роль этого условия можно понять так: при отсутствии арбитража, внутридневная волатильность малых изменений в доходностях соответствует дисперсии доходности от начала до закрытия торгов, то есть волатильности $s_{t+1} - s_t$. Типичный случай, когда условие на арбитраж нарушается, происходит из-за ограничений на свободное движение цен — например, когда котировки дискретны, то есть акции не котируются в долях денежной единицы, или существует разница между ценами продавца и покупателя (bid-ask spread), и так далее. Все подобные причины отклонения цены от эффективной[8] могут привести к временному наличию арбитража. Поэтому, при самых малых h (то есть, для данных с ультравысокой частотностью, например при $h = 1$ сек) в определении мер волатильности мы должны учитывать **микроструктурный шум**, отклонение наблюдаемой цены от эффективной. Как мы покажем далее, чем меньше h, тем большая часть $RV_{t,t+1}$ происходит от микроструктурного шума, а не от истинной динамики доходностей.

Zhou (1996) предложил моделировать данные ультравысокой частотности как диффузию (1) плюс микроструктурный шум. Снова обозначим логарифм наблюдаемой цены как s_t, а логарифм эффективной цены теперь обозначим как s_t^*. То есть, s_t^* есть цена без микроструктурных искажений. В модели Zhou (1996)

$$s_t = s_t^* + e_t, \tag{5}$$

где $\mathbb{E}[e_t] = 0$. То есть, микроструктурный шум e_t представлен аддитивной ошибкой с нулевым математическим ожиданием.

Существуют эмпирические подтверждения модели Zhou (1996) на финансовых данных с самой высокой частотностью. В динамике цен присутствуют характеристики, не соответствующие модели (1), например, присутствие заметных автокорреляций в доходностях. Если доходности определяются моделью (1), то на очень коротких промежутках времени эти

[7] В математических терминах процесс цены должен быть семимартингалом.

[8] Эффективная цена — это истинная цена акции с учетом будущих доходностей и рисков.

доходности практически непрогнозируемы, так как $s_{t+h} - s_t \approx \int_{\tau=t}^{t+h} \sigma_\tau dB_\tau$ при $h \approx 0$ и $\mathbb{E}_t \int_{\tau=t}^{t+h} \sigma_\tau dB_\tau = 0$. На практике, действительно, оценки автокорреляций для $s_{t+h} - s_t$ при $h = 5$ мин незначительны. Однако при увеличении частоты наблюдений, например, на так называемых **потиковых данных** (tick data), в доходностях на акции появляется существенная отрицательная автокорреляция.

Модель Zhou (1996) может воспроизвести эти наблюдаемые свойства доходностей. Даже если e_t в (5) независимо распределены, доходности в этой модели будут автокоррелированы:

$$y_n = s_{t+nh} - s_{t+(n-1)h} = \underbrace{s^*_{t+nh} - s^*_{t+(n-1)h}}_{\text{настоящая доходность}} + \underbrace{e_{t+nh} - e_{t+(n-1)h}}_{\text{шум}}. \tag{6}$$

Как уже было показано, доходности $y^*_n = s^*_{t+nh} - s^*_{t+(n-1)h}$ практически независимы во времени. Для микроструктурной части, $\mathbb{C}(e_{t+nh} - e_{t+(n-1)h}, e_{t+(n-1)h} - e_{t+(n-2)h}) = -\mathbb{V}(e_{t+(n-1)h}) < 0$. То есть модель воспроизводит наблюдаемые отрицательные корреляции на высокочастотных данных. Одновременно модель воспроизводит отсутствие автокорреляций на более длинных интервалах. Сравним посекундные наблюдения ($h = 1$ сек) с 5-минутными ($h = 300$ сек). Во втором случае «истинная» волатильность доходности примерно в 300 раз больше:

$$\frac{\int_t^{t+300} \mathbb{E}\left(\sigma^2_\tau\right) d\tau}{\int_t^{t+1} \mathbb{E}\left(\sigma^2_\tau\right) d\tau} = 300.$$

В то же время вклад микроструктурного шума в волатильность y_n остается таким же:

$$\frac{\mathbb{V}(e_{t+n} - e_{t+(n-1)})}{\mathbb{V}(e_{t+300n} - e_{t+300(n-1)})} = \frac{\mathbb{V}(e_{t+n}) + \mathbb{V}(e_{t+(n-1)})}{\mathbb{V}(e_{t+300n}) + \mathbb{V}(e_{t+300(n-1)})} = 1.$$

То есть, негативная автокорреляция остается, но ее величина становится несущественной, и модель (1) становится хорошим приближением на практике.

Ещё одно свойство наблюдений $RV_{t,t+1}$ не согласуется с моделью (1), но хорошо объясняется моделью с шумом (5). Допустим, доходности следуют динамике диффузии (1), тогда для любой частоты наблюдений (для любой h) математическое ожидание $RV_{t,t+1}$ остается постоянным. Для доказательства обозначим реализованную волатильность, рассчитанную на основе каждого m-го наблюдения, как $RV^{(m)}_{t,t+1}$ (то есть, используются N/m наблюдений из N). Заметим, что $RV^{(m)}_{t,t+1}$ является несмещённой оценкой интегральной волатильности $IV_{t,t+1}$, если $e_t = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(RV^{(m)}_{t,t+1}\right) &= \mathbb{E}\sum_{n=1}^{N/m} \left(s_{t+nmh} - s_{t+(n-1)mh}\right)^2 \\
&\approx \sum_{n=1}^{N/m} \int_{t+(n-1)mh}^{t+nmh} \mathbb{E}\left(\sigma^2_\tau\right) d\tau \\
&= \int_t^{t+1} \mathbb{E}\left(\sigma^2_\tau\right) d\tau \\
&= \mathbb{E}\left(IV_{t,t+1}\right)
\end{aligned}$$

для любого выбранного m, то есть для любой частоты наблюдений. Соблюдается ли это правило на практике, можно проверить с помощью графика волатильности (volatility signature plot) методом, предложенным в Andersen, Bollerslev, Diebold & Labys (2000). График волатильности отображает $RV^{(m)}_{t,t+1}$ как функцию от m, иногда усредненную по дням или по акциям. Так как $\mathbb{E}(RV^{(m)}_{t,t+1})$ не зависит от m в модели диффузии (1), такой график должен быть примерно горизонтальным. Однако мы наблюдаем, что графики волатильности для ликвидных акций горизонтальны при $mh > 5 \div 15$ мин, но быстро растут при увеличении частоты наблюдений. Такое поведение графика волатильности соответствует модели с аддитивным микроструктурным шумом (5). Для простоты изложения, предположим, что микроструктурные эффекты не автокоррелированы, то есть $\mathbb{C}(e_t, e_s) = 0$ для всех $t \neq s$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(RV_{t,t+1}^{(m)}\right) &= \mathbb{E}\sum_{n=1}^{N/m}\left(s_{t+nmh} - s_{t+(n-1)mh}\right)^2 \\
&\approx \mathbb{E}\left(IV_{t,t+1}\right) + \mathbb{E}\sum_{n=1}^{N/m}\left(e_{t+nmh} - e_{t+(n-1)mh}\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(IV_{t,t+1}\right) + 2\frac{N}{m}\mathbb{V}\left(e_t\right).
\end{aligned}$$

Математическое ожидание $RV_{t,t+1}^{(m)}$ увеличивается с частотой наблюдений. То есть смещение в оценке $RV_{t,t+1}^{(m)}$ увеличивается с N/m. Из-за этого смещения было предложено не использовать для оценивания все наблюдения, а останавливаться на 5–15-минутных данных. С такими данными смещение незначительно, но точность оценки ухудшается по сравнению с использованием всех данных. Альтернативный подход к выбору h заключается в нахождении частоты наблюдений с оптимальным соотношением смещения и точности.

Далее в этой главе мы обсудим три оценки волатильности, наиболее часто применяемые на данных с ультра-высокой частотностью: двухшкальную реализованную волатильность (two-scale realized volatility, TSRV) из Ait-Sahalia, Mykland & Zhang (2005), реализованные ядерные (realized kernels), см. Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde & Shephard (2008), и предварительно усредненные (pre-averaging) оценки, см. Jacod, Li, Mykland, Podolskij & Vetter (2009). Ради простоты изложения вновь предположим, что микроструктурные эффекты не автокоррелированы.

Вернёмся к свойствам оценки $RV_{t,t+1}$ при наличии микроструктурных искажений. Допустим, величина микроструктурных искажений e_t не зависит от истинных цен s_t^*. Математическое ожидание $RV_{t,t+1}$ в модели (5) с независимыми e_t

$$\mathbb{E}\left(RV_{t,t+1}\right) = \mathbb{E}\sum_{n=1}^{N}\left(y_n^*\right)^2 + \mathbb{E}\sum_{n=1}^{N}\left(e_{t+nh} - e_{t+(n-1)h}\right)^2 \approx \int_t^{t+1}\mathbb{E}\left(\sigma_\tau^2\right)d\tau + 2N\mathbb{E}\left(e^2\right)$$

включает в себя смещение $2N\mathbb{E}\left(e^2\right)$. Для того, чтобы избавиться от смещения, Zhou (1996) предложил скорректировать $RV_{t,t+1}$ на первую реализованную автоковариацию:

$$\widehat{IV}_{t,t+1}^{Zhou} = RV_{t,t+1} + \sum_{n=1}^{N}\left(y_n y_{n-1} + y_{n+1}y_n\right),$$

так как $\mathbb{E}\sum_{n=1}^{N}\left(y_n y_{n-1} + y_{n+1}y_n\right) = -\left(\sum_{n=1}^{N}\mathbb{V}(e_{t+(n-1)h}) + \mathbb{V}(e_{t+nh})\right) = -2N\mathbb{E}\left(e^2\right)$. Предложенная оценка несмещена, но тем не менее несостоятельна. Впоследствии Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde & Shephard (2008) ввели в оборот состоятельную реализованную ядерную оценку (realized kernel):

$$\widehat{IV}_{t,t+1}^{BNHLS} = RV_{t,t+1} + \sum_{l=1}^{L}k\left(\frac{l-1}{L}\right)\left(\gamma_l + \gamma_{-l}\right),$$

где $k(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемая весовая функция (ядро), $\gamma_l = \sum_{n=1}^{N} y_n y_{n-l}$ — реализованная автоковариация, и число автоковариаций $L \to \infty$ при $L/N \to 0$ и $N \to \infty$. Аналогичная оценка для матрицы ковариаций была предложена в Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde & Shephard (2011). Оценка из Ikeda (2015) корректирует оценку на асимптотическое смещение.

Мы уже упомянули, что из-за смещения в $RV_{t,t+1}$ на данных с малым h часто практикуется использование только части данных. То есть, вместо $RV^{(1)}_{t,t+1}$ используется $RV^{(m)}_{t,t+1}$ с $m \gg 1$. Допустим, наши данные записаны посекундно, но мы используем только 5-минутные данные, то есть $m = 300$. Заметим, что в этом случае существует 300 способов выбора 5-минутных наблюдений: начиная с первой, второй и т.д. секунды. Поэтому можно получить более точную оценку усреднением:

$$RV^{(avg,m)}_{t,t+1} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{n=1}^{N/m}\left(s_{t+nmh+j} - s_{t+(n-1)mh+j}\right)^2\right]. \tag{7}$$

Оценка TSRV из Ait-Sahalia, Mykland & Zhang (2005) получается из усредненной оценки (7) вычитанием смещения. Смещение в $RV^{(avg,m)}_{t,t+1}$ примерно совпадает со смещением в $RV^{(m)}_{t,t+1}$, то есть $RV^{(avg,m)}_{t,t+1}$ превышает $IV_{t,t+1}$ в среднем на $2\frac{N}{m}\mathbb{E}\left(e^2\right)$:

$$\mathbb{E}\left(RV^{(avg,m)}_{t,t+1}\right) = \mathbb{E}\left(IV_{t,t+1}\right) + 2\frac{N}{m}\,\mathbb{E}\left(e^2\right). \tag{8}$$

Для оценивания смещения заметим, что реализованная волатильность $RV^{(1)}_{t,t+1}$ при очень малых h определяется практически целиком волатильностью микроструктурных искажений. Поэтому оценкой смещения может служить сама реализованная волатильность $RV^{(1)}_{t,t+1}$:

$$\widehat{\sigma^2_e} \equiv \frac{RV^{(1)}_{t,t+1}}{2N} \sim \frac{IV_{t,t+1}}{2N} + \frac{\sum_{n=1}^{N}(e_{t+nh} - e_{t+(n-1)h})^2}{2N} \to^p \frac{1}{2}\mathbb{E}(e_{t+nh} - e_{t+(n-1)h})^2 = \mathbb{E}(e^2).$$

Корректируя на смещение, мы получаем оценку Ait-Sahalia, Mykland & Zhang (2005):

$$\widehat{IV}^{ZMA}_{t,t+1} = RV^{(avg,m)}_{t,t+1} - 2\frac{N}{m}\widehat{\sigma^2_e} = RV^{(avg,m)}_{t,t+1} - \frac{1}{m}RV^{(1)}_{t,t+1}.$$

Ait-Sahalia, Mykland & Zhang (2005) показали, что $\widehat{IV}^{ZMA}_{t,t+1}$ сходится со скоростью $N^{1/6}$. Далее Zhang (2006) предложила метод улучшения TSRV-оценки со скоростью сходимости $N^{1/4}$. Ait-Sahalia, Mykland & Zhang (2011) обобщили TSRV-метод на случай автокорреляций в микроструктурном шуме, но при условиях постоянной волатильности шума и независимости шума и цен. Kalnina & Linton (2008) исследовали корректность метода $\widehat{IV}^{ZMA}_{t,t+1}$ при более общих условиях. Во-первых, Kalnina & Linton (2008) снизили требование к независимости шума и цен без изменений в самой TSRV-оценке. Во-вторых, они предложили изменения в TSRV-оценке в случае переменной волатильности шума.

Наконец, третья оценка $IV_{t,t+1}$ в присутствии микроструктурных искажений была предложена в Jacod, Li, Mykland, Podolskij & Vetter (2009). Она основана на предварительном усреднении (pre-averaging estimator). Допустим, для каждых m наблюдений мы находим средний логарифм цены

$$\bar{s}_t = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(s^*_{t+i} + e_{t+i}).$$

По классическому закону больших чисел, среднее шума $\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} e_{t+i}$ сходится к $\mathbb{E}\left(e\right) = 0$ при $m \to \infty$. Поэтому $\bar{s}_t$ приближается к $\bar{s}^*_t$, но характеризуется большей волатильностью. Это свойство лежит в основе идеи построения оценки $IV_{t,t+1}$ на основе средних $\bar{s}_t$, рассчитанных на 5-минутных интервалах, а не самих цен. Так как $\bar{s}_t$ более волатильна чем $\bar{s}^*_t$, то получаемая оценка изначально смещена, однако смещение вычисляется как функция $\mathbb{V}(e_t)$. Стилизованная формула для оценки принимает форму

$$RV_{t,t+1}(\bar{s}) - \widehat{bias}.$$

Точная формула приведена в статьях Jacod, Li, Mykland, Podolskij & Vetter (2009) и Jacod & Protter (2012, глава 16), и включает не простые, а взвешенные средние значения $\bar{s}$. Заметим, что метод усреднения может быть применен практически к любой другой оценке волатильности в данном эссе и помогает убрать эффект микроструктурных искажений. Например, для вариации второй степени $BV_{t,t+1}$ аналогичная оценка была предложена в Podolskij & Vetter (2009). Оценка матрицы ковариаций с предварительным усреднением цен была разработана в Christensen, Kinnebrock & Podolskij (2010).

4 Оценивание волатильности на данных с переменной высокой частотностью

В предыдущих главах наблюдения, по конструкции, были распределены на равных промежутках времени ($h = 1/N$). Однако, например, потиковые данные по своей природе не равноудалены друг от друга, а зависят от скорости заключения сделок, то есть условий на рынке. Допустим, что наблюдения берутся через переменные промежутки времени $v_1, v_2, ..., v_n$. Ранее предполагалось, что $v_1 = v_2 = ... = v_n = h$, теперь же интервалы v_i могут изменяться. Интересно, что если v_i не зависят от процесса цен s_t, то все приведенные оценки волатильности определяются так же, как в случае с равноудаленными наблюдениями, см. Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde & Shephard (2008, глава 5.1). Случай, в котором интервалы v_i зависят от уровня цен s_t, намного сложнее. Известно, что в отсутствие микроструктурных искажений $RV_{t,t+1}$ продолжает быть состоятельной оценкой $IV_{t,t+1}$, см. Li, Mykland, Renault, Zhang & Zheng (2014), но не существует приемлемого метода для оценки соответствующих доверительных интервалов. Случай с v_i, зависящими от уровеня цен s_t, и микроструктурным шумом в литературе не рассмотрен.

Наконец, что делать в случае, когда цены наблюдаются через переменные промежутки времени, а целью является построение оценки матрицы ковариаций для нескольких акций? В такой многомерной задаче неравномерность наблюдений приводит к дополнительной проблеме несинхронизированных наблюдений.

Для решения этой проблемы наблюдения сначала синхронизируются. С этой целью производится интерполяция между наблюдениями. Наиболее часто используемый метод синхронизации представлен в Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde & Shephard (2011) и известен как метод «времени обновления» (refresh time synchronization). Вначале строится общая сетка наблюдений. Затем цены всех акций интерполируются на эту общую сетку по методу ближайшего предыдущего наблюдения. Общая сетка наблюдений строится следующим образом. Для каждой акции j обозначим первый момент времени заключения сделки как $t_1^{(j)}$. Тогда первый элемент общей сетки $\tau_1 = \max(t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, ...)$ является первым моментом времени, к которому по всем акциям заключена хотя бы одна сделка. Второй элемент сетки τ_2 является первым моментом времени, к которому по всем акциям заключена хотя бы одна новая сделка после τ_1, и так далее. Преимущество этого метода заключается в том, что изначальная асинхронность наблюдений не нарушает асимптотических результатов при выполнении подходящих условий. Недостаток этого метода заключается в его неэффективности, так как значительная часть наблюдений, вне общей сетки, игнорируется. В отдельных приложениях были предложены более эффективные методы для несинхронных данных, см. Hayashi & Yoshida (2005) и Sheppard & Xiu (2012).

5 Применение двухшаговых методов при моделировании и прогнозировании волатильности

Возращаясь к литературе по GARCH моделям, нужно отметить, что иногда интерес представляет именно прогноз волатильности, а не сама волатильность. В случае GARCH эти две величины совпадают. Однако это свойство является всего лишь ограничением модели GARCH: если волатильность оценивается с помощью методов, описанных в данном эссе, то необходим ещё один шаг – оценка модели для $\mathbb{E}_t RV_{t,t+1}$. В результате строится прогноз $RV_{t,t+1}$, что примерно совпадает с прогнозом (и это есть конечная цель) $IV_{t,t+1}$. Например, прогноз «волатильность не изменится» означает $\mathbb{E}_t RV_{t,t+1} = RV_{t-1,t}$.

Существует несколько моделей для $\mathbb{E}_t RV_{t,t+1}$, так же как существует несколько версий GARCH. Одна из самых простых и интуитивных — это HAR модель Corsi (2009):

$$\mathbb{E}_t RV_{t,t+1} = \gamma_0 + \gamma_1 RV_{t,t-1} + \gamma_2 RV_{t,t-5} + \gamma_3 RV_{t,t-22}.$$

То есть волатильность завтра зависит от волатильности сегодня, от волатильности за последнюю неделю (5 биржевых дней) и от волатильности за последний месяц (22 биржевых дня). Таким образом, мы принимаем во внимание многоуровневую временную структуру волатильности. HAR-модель оценивается любым методом для линейных моделей, например, методом наименьших квадратов. Заметим, что такой двухшаговый подход предполагает число наблюдений за день $N \to \infty$ для сходимости оценки волатильности и, одновременно, число дней в выборке $T \to \infty$ для сходимости оценок коэффициентов.

Другой удачный пример — модель ARFIMA (Andersen, Bollerslev, Diebold & Ebens 2001, Andersen, Bollerslev, Diebold & Labys 2001, 2003) — также учитывает многокомпонентную структуру волатильности. В ARFIMA модели динамика $RV_{t,t+1}$ представлена в следующей форме:

$$(1 - \rho_1 L - ... - \rho_p L^P)(1 - L)^d RV_{t,t+1} = (1 + \theta_1 L + ... + \theta_q L^q) u_t,$$

где L — лаговый оператор: $L^i RV_{t,t+1} = RV_{t-i,t+1-i}$, u_t — ошибка прогноза, и $0 < d < 1/2$.

В целом наличие $RV_{t,t+1}$ делает волатильность наблюдаемой. Поэтому любой метод для прогнозирования наблюдаемых данных может быть применим к волатильности. Andersen, Bollerslev & Huang (2011) используют в прогнозе разделение $RV_{t,t+1}$ на непрерывную волатильность и волатильность разрывов. HEAVY модель из Noureldin, Shephard & Sheppard (2012) включает одновременно элементы GARCH и двухшаговых методов с $RV_{t,t+1}$.

Список литературы

Ait-Sahalia, Y., P.A. Mykland & L. Zhang (2005). A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data. *Journal of American Statistical Association* 100, 1394–1411.

Ait-Sahalia, Y., P.A. Mykland & L. Zhang (2011). Ultra high frequency volatility estimation with dependent microstructure noise. *Journal of Econometrics* 160, 190–203.

Andersen, T., T. Bollerslev, F.X. Diebold & H. Ebens (2001). The distribution of realized stock return volatility. *Journal of Financial Economics* 61, 43–76.

Andersen, T., T. Bollerslev, F.X. Diebold & P. Labys (2000). Great realizations. *Risk* 13, 105–108.

Andersen, T., T. Bollerslev, F.X. Diebold & P. Labys (2001). The distribution of realized exchange rate volatility. *Journal of American Statistical Association* 96, 42–55.

Andersen, T., T. Bollerslev, F.X. Diebold & P. Labys (2003). Modeling and forecasting realized volatility. *Econometrica* 71, 579–625.

Andersen, T., T. Bollerslev & X. Huang (2011). A reduced form framework for modeling and forecasting jumps and volatility in speculative prices. *Journal of Econometrics* 160, 176–189.

Andersen, T., D. Dobrev, & E. Schaumburg (2012). Jump-robust volatility estimation using nearest neighbor truncation. *Journal of Econometrics* 169, 75–93.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307–327.

Barndorff-Nielsen, O.E., P.R. Hansen, A. Lunde & N. Shephard (2008). Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise. *Econometrica* 76, 1481–1536.

Barndorff-Nielsen, O.E., P.R. Hansen, A. Lunde & N. Shephard (2011). Multivariate realized kernels: Consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise and non-synchronous trading. *Journal of Econometrics* 162, 149–169.

Christensen, K., S. Kinnebrock & M. Podolskij (2010). Pre-averaging estimators of the ex-post covariance matrix in noisy diffusion models with non-synchronous data. *Journal of Econometrics* 159, 116–133.

Christensen, K., R. Oomen & M. Podolskij (2010). Realised quantile-based estimation of the integrated variance. *Journal of Econometrics* 159, 74–98.

Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics* 7, 174–196.

Corsi, F., D. Pirino, & R. Reno. (2010). Threshold bipower variation and the impact of jumps on volatility forecasting. *Journal of Econometrics* 159, 276–288.

Hayashi, T. & N. Yoshida (2005). On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes. *Bernoulli* 11, 359–379.

Ikeda, S. (2015). Two scale realized kernels: A univariate case. *Journal of Financial Econometrics* 13, 126–165.

Jacod, J., Y. Li, P. Mykland, M. Podolskij & M. Vetter (2009). Microstructure noise in the continuous case: The pre-averaging approach. *Stochastic Processes and Their Applications* 119, 2249–2276.

Jacod, J. & P. Protter (2012). *Discretization of Processes.* Springer.

Jacod, J. & M. Rosenbaum (2013). Quarticity and other functionals of volatility: efficient estimation *Annals of Statistics* 41, 1462–1484.

Kalnina, I. & O. Linton (2008). Estimating quadratic variation in the presence of endogenous and diurnal microstructure noise. *Journal of Econometrics* 147, 47–59.

Kristensen, D. (2010). Nonparametric filtering of the realized spot volatility: A kernel-based approach. *Econometric Theory* 26, 60—93.

Lee, S.S. & P.A. Mykland (2008). Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics. *Review of Financial Studies* 21, 2535–2563.

Li, Y., P.A. Mykland, E. Renault, L. Zhang & X. Zheng (2014). Realized volatility when sampling times are possibly endogenous. *Econometric Theory* 30, 580–605.

Mancini, C. (2009). Non-parametric threshold estimation for models with stochastic diffusion coefficient and jumps. *Scandinavian Journal of Statistics* 36, 270-–296.

Noureldin, D., N. Shephard & K. Sheppard (2012). Multivariate high-frequency-based volatility (HEAVY) models. *Journal of Applied Econometrics* 27, 907–933.

Podolskij, M. & M. Vetter (2009). Bipower-type estimation in a noisy diffusion setting. *Stochastic Processes and Their Applications* 119, 2803–2831.

Protter, P. (1992). *Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach*, 2nd edition. New York: Springer Verlag.

Shephard, N. & D. Xiu (2012). Econometric analysis of multivariate realized QML: Estimation of the covariation of equity prices under asynchronous trading. Working Paper, University of Chicago.

Zhang, L. (2006). Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: A multi-scale approach. *Bernoulli* 12, 1019–1043.

Zhou, B. (1996). High-frequency data and volatility in foreign-exchange rates. *Journal of Business & Economic Statistics* 14, 45–52.

Estimation of volatility measures using high frequency data

Ilze Kalnina

Université de Montréal, Montréal, Canada

Natalia Sizova

Rice University, Houston, USA

The availability of high frequency intra-day observations has created a new paradigm in volatility measurement. New methods in conjunction with high-frequency data allow nonparametric estimation of daily volatility and its forecast, variance-covariance matrices, instantaneous volatility and the jump contribution to the total variance. We survey some methods of volatility measurement including the recent literature on volatility estimation with ultra-high-frequency data in the presence of the market microstructure noise. We also discuss challenges specific to the estimation of the variance-covariance matrices with asynchronous observations.