

Улучшают ли спатальные структуры прогнозы волатильности?*

Станислав Анатольев[†]

*Российская экономическая школа, Москва, Россия
CERGE-EI, Прага, Чехия*

Станислав Храпов[‡]

Schenker AG, Франкфурт-на-Майне, Германия

Мы оцениваем, используя прогнозные эксперименты на данных по доходностям акций, предсказательную способность спатально-структурированных спецификаций ВЕКК для волатильности в сравнении со стандартными моделями ВЕКК. Подтверждается, что класс спатальных ВЕКК-моделей потенциально улучшает качество прогнозов многомерных волатильностей. В то же время разные критерии качества предсказаний резко расходятся в том, какие из типов ограничений на матрицы коэффициентов являются наиболее выгодными, какая степень однородности матричных коэффициентов наиболее благоприятна, и какие критерии группировки активов и количество групп обеспечивают наибольшее улучшение прогнозов волатильности. Состав портфеля и количество акций в нём также сильно влияют на улучшение качества предсказаний спатально-структурированной ВЕКК по сравнению с обычной конфигурацией.

1 Введение

Критическим моментом в моделировании многомерной волатильности является размерность пространства параметров, которая имеет громадное влияние на качество предсказаний волатильности. В то время как в последние десятилетия было предложено множество многомерных GARCH-моделей, начиная с сильно параметризованного VEC-представления (Bollerslev, Engle & Wooldridge 1988), одним из наиболее популярных остается ВЕКК-представление (Engle & Kroner 1995),¹ которое предоставляет элегантное решение проблемы сверхпараметризации многомерных GARCH-моделей вкуче с решением проблемы положительной определённости прогнозов волатильности (по крайней мере при применении к небольшому количеству доходностей). Уравнение ВЕКК(1,1) для n доходностей выглядит так:

$$H_t = CC' + Au_{t-1}u'_{t-1}A' + BH_{t-1}B',$$

где $n \times n$ -матрица H_t — это дисперсия $n \times 1$ -вектора доходностей u_t , условная на информации в момент времени $t - 1$, A — это $n \times n$ -матрица «влияния новостей», B — это $n \times n$ -матрица «обратных связей», а C — это нижнетреугольная $n \times n$ -матрица разложения Холецкого для матрицы констант.

*Цитировать как: Анатольев, Станислав & Станислав Храпов (2019) «Улучшают ли спатальные структуры прогнозы волатильности?», Квантиль, №14, стр. 63–81. Citation: Anatolyev, Stanislav & Stanislav Khrapov (2019) “Do spatial structures yield better volatility forecasts?” Quantile, No.14, pp. 63–81.

[†] Адрес: 121353, г. Москва, Сколковское шоссе, дом 45. Электронная почта: sanatoly@nes.ru

[‡] Адрес: Edmund-Rumpler-Straße 3, 60549 Frankfurt am Main. Электронная почта: khrapovs@gmail.com

¹ Другая широко распространенная многомерная GARCH-модель, Динамические условные корреляции (Dynamic Conditional Correlation, Engle 2002), похоже, содержит некоторые проблемы теоретического плана (см. Caporin & McAleer 2012 и Aielli 2013) и эмпирически похожа на скалярную ВЕКК-модель (Caporin & McAleer 2008).

Степень параметризации ВЕКК-моделей в свою очередь сильно варьируется со своей формой, зависящей от количества ограничений, накладываемых на матрицы A и B . В полной ВЕКК-модели эти матрицы неограничены,² что приводит к n^2 параметрам в каждой из них. В диагональной ВЕКК-модели матрицы A и B диагональны (так что в уравнении выше $A = \text{dg}(a)$ и $B = \text{dg}(b)$), что приводит к n параметрам в каждой из них. Наконец, в скалярной ВЕКК-модели (Ding & Engle 2001) матрицы A и B пропорциональны единичной (так что $H_t = CC' + \alpha^2 u_{t-1} u_{t-1}' + \beta^2 H_{t-1}$), что приводит к одному параметру в каждой. В матрице C разных элементов $\frac{1}{2}n(n+1)$ в каждой из трёх стандартных ВЕКК-моделей.³ Краткое описание содержится в верхней части таблицы 1. Степень параметризации сильно меняется от формы к форме и, естественно, может сильно влиять на качество прогнозирования. Имеется ощущение, что полная ВЕКК-модель, возможно, слишком сильно параметризована, и какая-нибудь из ограниченных форм, скорее всего, способна лучше прогнозировать волатильность.

Недавно Sarojin & Paguolo (2015) предложили промежуточную форму для многомерных GARCH-моделей, которая накладывает ограничения, основанные на спатальной структуре активов, чьи доходности моделируются. Для полной ВЕКК-модели эти ограничения, налагающие диагональность на матричные коэффициенты в линейной комбинации спатальных взвешивающих матриц, уменьшают количество параметров с $O(n^2)$ до $O(n)$ таким же образом, как формулируются спатальные авторегрессии и модели спатальных ошибок (см., например, LeSage & Pace 2009). Структурированная по близости ВЕКК-модель, таким образом, подразумевает перетекания волатильности внутри групп активов, похожих по одному или нескольким критериям. В разделе 2 детально описана конструкция спатальных ВЕКК-структур, а краткое описание содержится в нижней части таблицы 1.

Цель настоящей статьи — выявить, используя реальные данные по ликвидным акциям, потенциал спатальных форм из ВЕКК-класса по улучшению качества прогнозов многомерной волатильности по сравнению со стандартными моделями ВЕКК. Как следует из эмпирического приложения в Sarojin & Paguolo (2015), быстрый ответ — да, есть позитивный и ощутимый потенциал.⁴ Если мы это подтвердим (и на самом деле да, подтверждаем), нашей очередной целью является понять, какие типы ограничений на матрицы спатальных коэффициентов наиболее обещающие и определить место наиболее выгодных спатальных ВЕКК-форм в линейке полных/диагональных/скалярных форм стандартной ВЕКК-модели. В частности, ответы на следующие вопросы могут представлять интерес. Находится ли качество прогнозов спатальных ВЕКК-моделей в промежутке между качеством, обеспечиваемым полной и диагональными формами стандартной ВЕКК, или же в промежутке между качеством, обеспечиваемым диагональными и скалярной формами стандартной ВЕКК? Какова «оптимальная» степень однородности на диагоналях матриц коэффициентов? Каково «оптимальное» количество критериев группировки? Какие критерии группировки явля-

²Не считая ограничений, гарантирующих стационарность процесса волатильности.

³Метод таргетирования волатильности (Engle & Mezrich 1996) помогает уменьшить размерность вектора параметров оптимизационной задачи разделением оценивания на два шага: оценивание безусловной дисперсии $\hat{\Omega}$ непосредственно из данных на первом шаге и максимизация ограниченного (квази-)правдоподобия, соответствующего модифицированному дисперсионному уравнению $H_t = \hat{\Omega} + A(u_{t-1}u_{t-1}' - \hat{\Omega})A' + B(H_{t-1} - \hat{\Omega})B'$ на втором шаге.

Мы не применяем таргетирование волатильности по нескольким причинам, среди которых, в порядке возрастания важности: (а) мы не рассматриваем очень высокомерные приложения; (б) как выяснилось в Anatolyev & Khrarov (2015), большинство оценок и критериев более смещена при таргетировании волатильности, чем когда его избегают; (в) спатальные версии ВЕКК-модели не позволяют таргетировать волатильность без изменения структуры моделей; (г) на первом шаге процедуры таргетирования волатильности матрица безусловных дисперсий, содержащая $\frac{1}{2}n(n+1)$ различных элементов, оценивается непараметрически из тех же данных, так что таргетирование волатильности не больно-то уменьшает степень параметризации.

⁴Более того, симуляции в Sarojin & Paguolo (2015) показывают, что даже неверно специфицированные, но более компактные спатальные ВЕКК-спецификации могут иметь преимущество перед стандартными или полными спатальными ВЕКК-моделями в терминах прогнозной способности.

ются наиболее «важными» в обеспечении наибольшего улучшения прогнозов волатильности?

К сожалению, выглядит так, что нет четких ответов на эти вопросы. Существует определенный потенциал спатального структурирования ВЕКК-модели в улучшении прогнозирования волатильности в сравнении со стандартной ВЕКК-моделью. Однако, это улучшение очень чувствительно к таким факторам, как критерии качества прогнозирования, типы накладываемых ограничений, количество групп в спатальной структуре и критерии, используемые для формирования групп. Результаты также сильно могут меняться в зависимости от количества акций в рассматриваемых портфелях и от состава портфелей.

Статья организована следующим образом. Мы представляем спатальную ВЕКК-модель и её различные ограниченные формы в разделе 2. В разделе 3 описываются схемы и алгоритмы, которые мы используем в эмпирическом эксперименте, а данные — в разделе 4. В разделе 5 содержатся результаты и их обсуждение. Наконец, раздел 6 завершает статью. Немного об обозначениях: для вектора x мы используем обозначение $\text{dg}(x)$ для диагональной матрицы, в которой главная диагональ заполняется элементами вектора x , а $\mathbf{1}_n$ обозначает вектор единиц размера n .

2 Спатальная ВЕКК-модель

Вектор размерности n логарифмов доходностей можно представить как

$$r_t = \mu_t + H_t^{-1/2} \varepsilon_t,$$

где μ_t — это n -вектор условных средних, H_t — $n \times n$ -матрица условных дисперсий, а ε_t — вектор независимых одинаково распределенных ошибок. В соответствии с общепринятой практикой моделирования условных дисперсий мы оставляем без внимания моделирование условных доходностей и просто приравниваем их к безусловным средним: $\mu_t = E[r_t]$. В эмпирической части мы центрируем доходности относительно их выборочного среднего.

Как описано во Введении, если в стандартной ВЕКК-модели матрицы A и B диагонально ограничены, т.е. $A = \text{dg}(a)$ и $B = \text{dg}(b)$, то это приводит к диагональному ВЕКК-представлению, а если матрицы A и B пропорциональны единичной матрице, т.е. $A = \alpha I_n$ и $B = \beta I_n$, то это ограничение приводит к скалярному ВЕКК-представлению; см. верхнюю часть таблицы 1.

В общей спатальной ВЕКК-модели матрицы коэффициентов имеют следующую структуру. Пусть m матриц W_1, W_2, \dots, W_m будут спатальными весовыми матрицами, обычно представляющими группировку активов по m критериям.⁵ Матрицы A и B ограничены следующим образом:

$$A = \text{dg}(a_0) + \sum_{i=1}^m \text{dg}(a_i) W_i,$$

⁵Предположим, существует четыре актива, которые сгруппированы в две группы по определенному критерию (например, отрасль, размер и т.д.) и организованы соответственно. Тогда $n = 4$, $m = 1$, и единственная спатальная весовая матрица выглядит следующим образом:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В случае, если в одной из групп больше двух активов, соответствующие строки матрицы W_1 содержат число, обратное числу активов в группе минус единица: например, если в группе 5 активов, то соответствующие строки заполнены $\frac{1}{4}$ и 0. Более детальное описание конструкции весовых матриц см. в LeSage & Pace (2009) и Caporin & Paruolo (2015).

$$B = \text{dg}(b_0) + \sum_{i=1}^m \text{dg}(b_i) W_i,$$

в то время как постоянная во времени матрица CC' имеет следующую структуру:

$$D^{-1} \text{dg}(d_0) (D')^{-1},$$

где

$$D = I_n - \sum_{i=1}^m \text{dg}(d_i) W_i.$$

Идея такой структуры матриц A , B и D заключается в учете эффектов взаимосвязей между волатильностями активов, принадлежащих одной группе. В то время как структура матриц A и B похожа на таковую AR(1)-коэффициента в спатальной авторегрессионной модели (SAR), структура матрицы CC' соответствует структуре в модели спатальной ошибки (SEM). Более детальное описание см. в LeSage & Pace (2009) и Caporin & Paruolo (2015). Такие ограничения делают спатальную ВЕКК-модель ближе к диагональной ВЕКК модели, не приводя к их полной идентичности, но сохраняя возможность моделирования наиболее важных взаимосвязей волатильностей между активами. Они снижают число параметров с $O(n^2)$ до $O(n)$; см. нижнюю часть таблицы 1.

Caporin & Paruolo (2015) предложили спатальную (или гетерогенную) ВЕКК-модель, которую можно ограничить еще сильнее посредством введения полных или частичных ограничений на вектора a_i , b_i и d_i , $i = 1, \dots, m$. В частности, полная гомогенность предполагает одинаковую взаимосвязь между активами для каждой группы, т.е. гомогенность векторов a_i , b_i и d_i для всех $i = 1, \dots, m$, или, формально, $a_i = \alpha_i \mathbf{1}_n$, $b_i = \beta_i \mathbf{1}_n$, $d_i = \delta_i \mathbf{1}_n$, $i = 1, \dots, m$; в то же время вектора a_0 и b_0 остаются без ограничений. Групповая гомогенность не требует такого ограничения, так что гомогенность проявляется только внутри групп, специфичных для конкретного критерия группировки:

$$a_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} \beta_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \beta_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}, \quad d_i = \begin{bmatrix} \delta_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \delta_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m,$$

где k_i — это число групп для критерия i , а n_k — это число активов в группе k . Итого, мы используем дополнительный набор ограничений, приводящий наиболее ограниченную гомогенную спатальную ВЕКК-модель к стандартной ВЕКК-конфигурации, дополнительно предполагая, что вектора a_0 и b_0 тоже гомогенны для всех активов: $a_0 = \alpha_0 \mathbf{1}_n$ и $b_0 = \beta_0 \mathbf{1}_n$. Мы называем такую спецификацию «скалярной гомогенной» спатальной ВЕКК.

В нашем эмпирическом эксперименте мы проверяем три значения m . В случае $m = 1$ принцип группировки — это отрасль, к которой принадлежит компания, страна, где она зарегистрирована, или капитализация компании, которая принимает только два значения — крупная или маленькая. Когда $m = 2$, используются две категории из трех, а если $m = 3$, то все три. Дополнительно мы вводим искусственную конструкцию, где $m = 1$ без группировки, или, другими словами, когда все активы принадлежат к одной и той же группе (которую, например, тривиально можно назвать «актив»); соответственно, спатальная взвешивающая матрица равна $W_1 = \mathbf{1}_n \mathbf{1}'_n - I_n$. Эта ситуация (которую мы называем «единственная группа») служит связующим звеном между стандартной спецификацией ВЕКК и спатальной ВЕКК и предназначена подчеркнуть достоинства и недостатки введения «равномерной» спатальной структуры в модель ВЕКК без использования гетерогенности спатальных ограничений.

Таблица 1: ВЕКК-уравнения и ограничения

ВЕКК	Тип ограничения	Новостной эффект	Обратная связь	Константа	Число параметров
Стандартная	Полная	A	B	CC'	$2n^2 + \frac{1}{2}n(n+1)$
	Диагональная	$\text{dg}(a)$	$\text{dg}(b)$	CC'	$2n + \frac{1}{2}n(n+1)$
	Скалярная	αI_n	βI_n	CC'	$2 + \frac{1}{2}n(n+1)$
Спациальная	Гетерогенная	a_i свободный	b_i свободный	d_i свободный	$3(m+1)n$
	Гомогенная по группам	a_0 свободный $a_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}$	b_0 свободный $b_i = \begin{bmatrix} \beta_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \beta_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}$	d_0 свободный $d_i = \begin{bmatrix} \delta_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \delta_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}$	$3(n+mk)$
	Гомогенная	a_0 свободный $a_i = \alpha_i \mathbf{1}_n$	b_0 свободный $b_i = \beta_i \mathbf{1}_n$	d_0 свободный $d_i = \delta_i \mathbf{1}_n$	$3(n+m)$
	Скалярно гомогенная	$a_0 = \alpha_0 \mathbf{1}_n$ $a_i = \alpha_i \mathbf{1}_n$	$b_0 = \beta_0 \mathbf{1}_n$ $b_i = \beta_i \mathbf{1}_n$	d_0 свободный $d_i = \delta_i \mathbf{1}_n$	$n + 3m + 2$

Примечания: в спациальной структуре $A = \text{dg}(a_0) + \sum_{i=1}^m \text{dg}(a_i) W_i$, $i = 1, \dots, m$; $B = \text{dg}(b_0) + \sum_{i=1}^m \text{dg}(b_i) W_i$, $i = 1, \dots, m$; $CC' = D^{-1} \text{dg}(d_0) (D')^{-1}$, где $D = I_n - \sum_{i=1}^m \text{dg}(d_i) W_i$, $i = 1, \dots, m$. Вектор $d_0 > 0$ всегда неограничен.

Также, в случае $m = 2$ мы рассматриваем спатильную конструкцию, где мы преднамеренно делаем ошибку в сортировке активов по группам. В частности, мы предполагаем, что фирмы в разных странах и разных отраслях спатильно связаны. В случае четырех активов существует только одна такая ошибочная конфигурация (которую мы называем как «ошибочная группировка»). Это позволяет увидеть, насколько критична корректная спатильная классификация при ее использовании в целом.

3 Оценивание и анализ результатов

3.1 Оценивание

Для оценивания параметров модели мы используем метод гауссовского максимального квази-правдоподобия. Гауссовская логарифмическая функция правдоподобия (после аффинной трансформации) равняется

$$l_t(\theta) = -\ln |H_t| - u_t' H_t^{-1} u_t,$$

где H_t определяются рекурсивно посредством

$$H_t = CC' + Au_{t-1}u_{t-1}'A' + BH_{t-1}B'.$$

Мы максимизируем логарифмическую функцию квази-правдоподобия $\sum_{t=1}^T l_t(\theta)$ путем выбора вектора θ , который варьируется по длине в зависимости от спецификации модели ВЕКК (см. таблицу 1). С большим числом параметров в некоторых спецификациях проблема численной оптимизации становится определяющей для поиска «верного» набора оценок параметров среди потенциального множества локальных максимумов. Описанная ниже итеративная процедура гарантирует, что оптимизация сходится к глобальному максимуму.

С целью оценивания стандартной ВЕКК модели мы выбираем начальные значения параметров в соответствии со следующим правилом.

- Начальные значения для скалярной модели, параметров α и β : $\sqrt{0.2}$ и $\sqrt{0.6}$.
- Начальные значения для диагональной модели, векторов a и b : $\hat{\alpha}\mathbf{1}_n$ и $\hat{\beta}\mathbf{1}_n$, где $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ оценены при скалярном ограничении на предыдущем шаге.
- Начальные значения для полной модели, матриц A и B : $\text{dg}(\hat{a})$ и $\text{dg}(\hat{b})$, где \hat{a} и \hat{b} оценены при диагональном ограничении на предыдущем шаге.
- Начальные значения для C вычисляются с помощью декомпозиции Холецкого матрицы $S - ASA' - BSB'$, где $S = T^{-1} \sum_{t=1}^T u_t u_t'$ — безусловная выборочная дисперсия u_t , а A и B выбраны согласно предыдущему шагу.

С целью оценивания спатильной модели ВЕКК мы выбираем начальные значения параметров в соответствии со следующим правилом.

- Начальные значения для скалярной гомогенной модели, α_0 и β_0 : $\sqrt{0.2}$ и $\sqrt{0.6}$, соответственно; а α_i , β_i и δ_i , $i = 1, \dots, m$, — нули. Начальные значения для d_0 берутся из диагональных элементов $S - ASA' - BSB'$, где $S = T^{-1} \sum_{t=1}^T u_t u_t'$ — безусловная выборочная дисперсия u_t .
- Начальные значения для гомогенной модели, a_0 и b_0 : $\hat{\alpha}_0\mathbf{1}_n$ и $\hat{\beta}_0\mathbf{1}_n$, соответственно; d_0 : \hat{d}_0 ; α_i , β_i , и δ_i : $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$ и $\hat{\delta}_i$, соответственно, $i = 0, 1, \dots, m$. Все параметры с крышками наследуются от скалярных гомогенных оценок с предыдущего шага.

- Начальные значения для модели гомогенных групп, a_0 , b_0 и d_0 : \hat{a}_0 , \hat{b}_0 , и \hat{d}_0 , соответственно; $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, и $\delta_{i,j}$: $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$ и $\hat{\delta}_i$, соответственно, $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, k_i$. Все параметры с крышками приравниваются к гомогенным оценкам с предыдущего шага.
- Начальные значения для гетерогенной модели, a_0 , b_0 и d_0 : \hat{a}_0 , \hat{b}_0 , и \hat{d}_0 , соответственно; a_i , b_i , и d_i : $[\hat{\alpha}_{i,1}\mathbf{1}'_{n_1}, \dots, \hat{\alpha}_{i,k_i}\mathbf{1}'_{n_{k_i}}]'$, $[\hat{\beta}_{i,1}\mathbf{1}'_{n_1}, \dots, \hat{\beta}_{i,k_i}\mathbf{1}'_{n_{k_i}}]'$, и $[\hat{\delta}_{i,1}\mathbf{1}'_{n_1}, \dots, \hat{\delta}_{i,k_i}\mathbf{1}'_{n_{k_i}}]'$, соответственно, $i = 1, \dots, m$. Все параметры с крышками приравниваются оценкам из модели гомогенных групп с предыдущего шага.

3.2 Прогнозирование

Прогнозирование волатильности выполняется на основе движущегося окна фиксированного размера $L < T$. В нашем эмпирическом исследовании мы работаем с T , примерно равным 3500, и L , примерно равным 2000. Мы начинаем с подвыборкой первых L наблюдений из всего набора данных. Для этой подвыборки мы оцениваем параметры определенной модели и вычисляем прогнозы с помощью стандартной рекурсии:

$$\hat{H}_{L+1}^f = \hat{C}\hat{C}' + \hat{A}u_L u_L' \hat{A}' + \hat{B}\hat{H}_L \hat{B}'.$$

На следующем шаге мы повторяем цикл, но для подвыборки доходностей $[u'_2, \dots, u'_{L+1}]$. Таким образом мы получаем прогноз \hat{H}_{L+2}^f . Мы повторяем эту операцию до тех пор, пока не исчерпан весь набор доступных данных, что дает нам в итоге $T - L$ прогнозов $\{\hat{H}_{L+s}^f\}_{s=1}^{T-L}$. На первом шаге оценивания с помощью процедуры движущегося окна параметры оцениваются на основе итеративного алгоритма, описанного в разделе 3.1. Далее, начальные значения параметров для оптимизационной процедуры берутся с предыдущего шага. Идея заключается в том, что оценки параметров не должны меняться при одновременном удалении одного наблюдения из выборки и добавлении нового для сохранения ее размера.

3.3 Анализ качества прогнозирования

Мы оцениваем качество прогнозов дисперсии на основе трех типов критериев: одни измеряют статистическое качество прогнозирования, другие соответствуют точке зрения распределения активов, а последние соответствуют перспективе управления рисками. Подобно Laurent, Rombouts & Violante (2012), Caporin & McAleer (2014) и Clements, Doolan, Hurn & Becker (2012), мы рассматриваем следующие статистические меры.⁶

⁶В дополнение к перечисленным ниже, мы вычислили еще три критерия, но не приводим их значения по причине их сильной схожести с уже описанными: Евклидова норма разницы между прогнозами и реализованными значениями

$$\text{eucl} = \frac{1}{k^2} \text{vech}(\hat{H}_{T+1}^f - \tilde{H}_{T+1})' \text{vech}(\hat{H}_{T+1}^f - \tilde{H}_{T+1}),$$

которая, в отличие от нормы Фробениуса, учитывает ковариации только один раз; критерий среднего квадратичного отклонения (MSE)

$$\text{mse} = (s_{T+1}^w - \hat{s}_{T+1}^w)^2,$$

который штрафует излишне большие отклонения реализованной дисперсии портфеля от её прогноза на один шаг вперед; и критерий QLIKE

$$\text{qlike} = \log \hat{s}_{T+1}^w + s_{T+1}^w (\hat{s}_{T+1}^w)^{-1},$$

который в отличие от MSE принимает во внимание асимметрию распределения с позитивным носителем, характерную для доходностей портфеля. Результаты для Евклидовой нормы очень схожи с результатами для нормы Фробениуса; ранжирование на основе MSE схоже с логарифмическим счетчиком, но не настолько четко, и, наконец, результаты использования критерия QLIKE сильно напоминают результаты использования функции потерь, основанной на стоимости риска.

Норма Фробениуса ('frob') квадрата разницы между прогнозом дисперсии \hat{H}_{T+1}^f и ее реализованным прокси \tilde{H}_{T+1} — это

$$\text{frob} = \text{tr} \left[\left(\hat{H}_{T+1}^f - \tilde{H}_{T+1} \right)' \left(\hat{H}_{T+1}^f - \tilde{H}_{T+1} \right) \right],$$

где $\text{tr}(\cdot)$ — это оператор суммирования диагональных элементов матрицы. Реализованный прокси — это квадрат доходности, $\tilde{H}_{T+1} = u_{T+1}u_{T+1}'$. Еще один статистический критерий — это функция потерь Штейна ('stein')

$$\text{stein} = \log \left| \hat{H}_{T+1}^f \right| + u_{T+1}' \left(\hat{H}_{T+1}^f \right)^{-1} u_{T+1}.$$

Эта функция потерь — всего лишь (дважды) значение логарифма правдоподобия со знаком минус, вычисленное для прогноза волатильности. Обратим внимание, что оно не зависит от прокси волатильности, что делает критерий свободным от ошибки оценивания, присущей вышеописанным критериям. Как показывают Patton & Sheppard (2009), эти функции потерь робастны к неточным прокси волатильности.

С целью непрямого анализа прогнозов с точки зрения распределения активов мы определяем следующие значения в соответствии с Caron & McAleer (2014) для некоторых весов портфеля w : реализованных доходностей портфеля, $r_{T+1}^w = w'r_{T+1}$, ожидаемых доходностей портфеля, $\hat{r}_{T+1}^w = w'\hat{\mu}_{T+1}^f$, реализованных дисперсий портфеля, $s_{T+1}^w = w'\tilde{H}_{T+1}w$, и ожидаемых дисперсий портфеля, $\hat{s}_{T+1}^w = w'\hat{H}_{T+1}^fw$. В данной статье мы рассматриваем равномерно взвешенные портфели, где $w = \mathbf{1}_k/k$.⁷ С этими определениями мы используем следующий критерий логарифмического счётчика ('lscore') (см. также Patton & Sheppard, 2009):

$$\text{lscore} = \log \hat{s}_{T+1}^w + (r_{T+1}^w - \hat{r}_{T+1}^w)^2 (\hat{s}_{T+1}^w)^{-1}.$$

Эта функция потерь сильно напоминает (дважды) логарифм гауссовской функции правдоподобия со знаком минус, вычисленной для прогноза дисперсии портфеля.

В терминах управления рисками наиболее важные и практичные критерии основаны на стоимости риска. Стоимость риска портфеля определяется как

$$\text{var}_T(\alpha) = Q_\alpha \sqrt{\hat{s}_{T+1}^w},$$

где Q_α — это α -квантиль распределения доходности портфеля. Соответствующая функция потерь ('var'), используемая в Caron & McAleer (2008), определяется как

$$\text{var} = \begin{cases} 1 + e_{T+1}^2, & e_{T+1} < 0, \\ 0, & e_{T+1} \geq 0, \end{cases}$$

где $e_{T+1} \equiv r_{T+1}^w - \text{var}_T(\alpha)$. В терминологии, принятой в Ferreira & Lopez (2005), каждое событие, когда $e_{T+1} < 0$ или $r_{T+1}^w < \text{var}_T(\alpha)$, называется исключением. Каждое исключение добавляет все растущее значение с более высоким разрывом между доходностью и прогнозом стоимости риска. Любое обратное событие имеет нулевую стоимость.

Чтобы убедиться, что разница между качеством прогнозов между различными моделями статистически значима, мы конструируем доверительные множества моделей (MCS), предложенные в Hansen, Lunde & Nason (2011) и использованные, например, в Laurent, Rombouts

⁷Ещё один возможный вариант заключается во взвешивании, соответствующем минимизации дисперсии, где $w = (\hat{H}_{T+1}^f)^{-1} \mathbf{1}_k (\mathbf{1}_k' (\hat{H}_{T+1}^f)^{-1} \mathbf{1}_k)^{-1}$, но эти веса не подходят для сравнения, поскольку они не независимы от выбора модели дисперсии.

& Violante (2012) и Anatolyev & Kobotaev (2018) в контексте прогнозирования волатильности. Коротко, множество моделей доверия — это подмножество моделей, которое содержит лучшую (относительно функции потерь на рассмотрении) модель с определенной вероятностью покрытия. Процедура MCS также производит для всех моделей их индивидуальные p -значения, которые можно грубо интерпретировать как их шанс быть наилучшей. В нашей имплементации⁸ мы использовали блочный бутстрап с длиной, равной квадратному корню от размера выборки, $B = \sqrt{T}$.

4 Данные

Мы используем два набора данных: один содержит четыре актива, а другой восемь. Назовем их Набор данных А и Набор данных В. Активы выбраны так, что в каждом из них существует естественная группировка с равными размерами групп (два актива для каждой группы), и значения для каждого критерия существенно отличаются друг от друга. Набор данных А, таким образом, содержит два группировочных критерия, а Набор данных В — три группировочных критерия. Использование двух наборов данных позволяет нам, во-первых, убедиться, что тенденции, выявленные для одного, не являются случайными, и во-вторых, с целью уточнить выводы, полученные на маленьком наборе данных.

Оба набора данных начинаются с 3-го января 2002 года и заканчиваются 27-го ноября 2015 года, что дает нам $T = 3500$ дневных наблюдений. Данные о дневных ценах загружены с сайта Yahoo Finance. Все цены скорректированы на сплиты активов и выплату дивидендов. Размер движущегося окна выбран как $L = 2000$. В результате это дает нам $T - L = 1500$ прогнозов дисперсий для каждой модели/ограничения.

4.1 Набор данных А

Набор данных А содержит четыре голубые фишки (тикер актива дан в скобках): Ford Motors (F), Siemens (SIE), Nike (NKE), и Adidas (ADS). Дневные доходности для всей выборки показаны на Рис. 1. Здесь два критерия группировки — по принадлежности к отрасли и по стране регистрации. Таблица 2 иллюстрирует группировку компаний по обоим критериям.

Таблица 2: Группировка в Наборе данных А

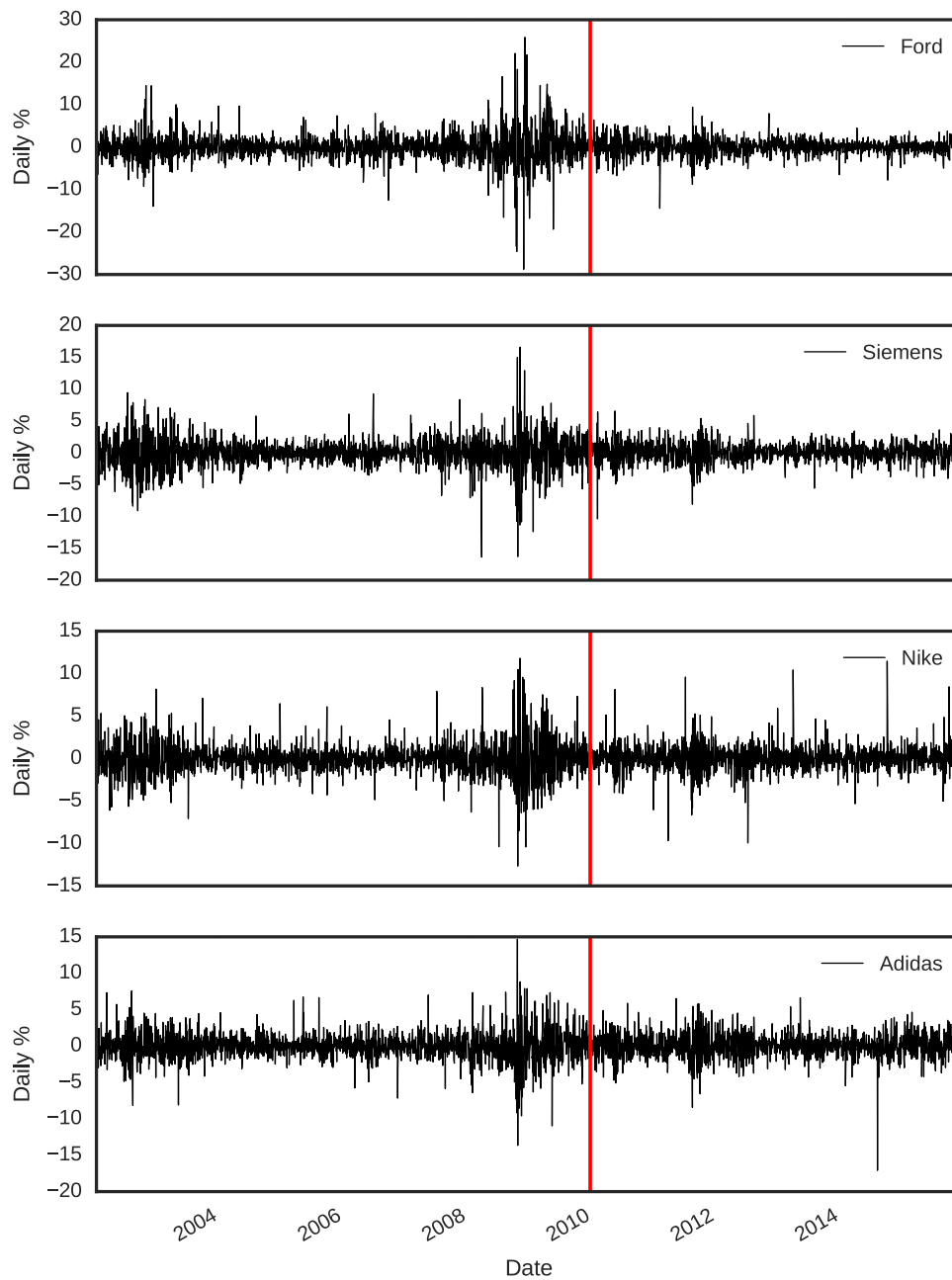
Отрасль	Страна	
	США	Германия
Машиностроение	Ford (F)	Siemens (SIE)
Одежда	Nike (NKE)	Adidas (ADS)

4.2 Набор данных В

Набор данных В содержит восемь компаний (тикер и рыночная капитализация на ноябрь 2015 года даны в скобках): Denbury Resources (DNR, \$1.2B), Occidental Petroleum (OXY, \$48B), Yanzhou Coal Mining (YZC, \$910M), CNOOC (CEO, \$50B), Ebix (EBIX, \$1.2B), Adobe Systems (ADBE, \$46B), Sohu.com (SOHU, \$2B), NetEase (NTES, \$21B). Дневные доходности для всей выборки показаны на Рис. 2. Здесь три критерия группировки — по стране, по отрасли и по рыночной капитализации. Таблица 3 иллюстрирует группировку этих компаний по трем критериям.

⁸Мы используем библиотеку ARCH Кевина Шепарда, которая содержит MCS как одну из своих функций, см. <https://github.com/bashtage/arch>.

Рис. 1: Центрированные дневные доходности (%) для Набора данных А

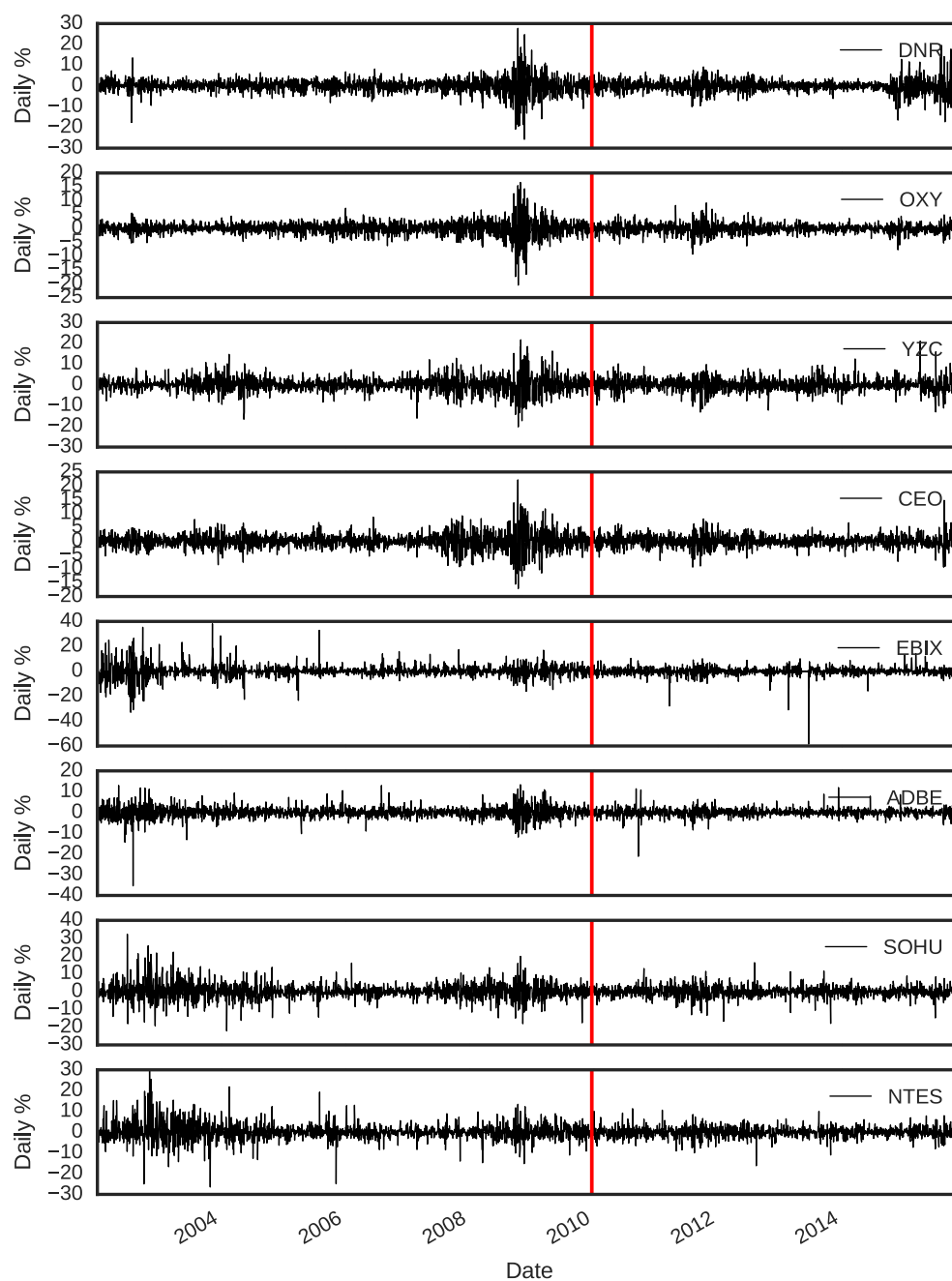


Замечание: вертикальная линия соответствует началу периода вневыборочного прогнозирования.

Таблица 3: Группировка в Наборе данных В

Отрасль	Капитализация	Страна	
		США	Китай
Природные ресурсы	Большая	OXY	CEO
	Маленькая	DNR	YZC
Информационные технологии	Большая	ADBE	NTES
	Маленькая	EBIX	SOHU

Рис. 2: Центрированные дневные доходности (%) для Набора данных В



Замечание: вертикальная линия соответствует началу периода вневыборочного прогнозирования.

5 Эмпирические результаты

5.1 Набор данных А

Средние значения функций потерь для Набора данных А приведены в таблице 4, а p -значения для множества моделей доверия приведены в таблице 5.

Таблица 4: Средние значения функций потерь, Набор данных А

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob ($\times 10^{-2}$)	stein	lscore ($\times 10$)	var ($\times 10^2$)
стандартная	скалярная		4,01	6,87	13,07	8,56
	диагональная		4,00	6,86	13,03	8,58
	полная		4,05	7,03	13,02	9,87
спатальная	ск-гомо	обе	3,99	6,86	12,99	8,36
		отрасль	3,99	6,90	12,78	9,30
		страна	3,98	6,89	12,80	9,02
		ложные группы	4,00	6,92	12,83	9,55
		одна группа	4,00	6,86	12,95	8,58
	гомо	обе	3,99	6,83	12,93	8,33
		отрасль	4,87	7,61	13,26	7,61
		страна	4,00	6,87	12,81	9,14
		ложные группы	4,00	6,92	12,79	9,59
		одна группа	4,53	7,38	13,29	7,19
гр-гомо	обе	4,00	6,84	12,93	8,32	
	отрасль	4,87	7,62	13,24	7,79	
	страна	5,50	8,35	13,92	6,22	
	ложные группы	4,00	6,91	12,81	9,42	
гетеро	обе	4,04	6,93	13,07	9,08	
	отрасль	4,87	7,62	13,24	7,79	
	страна	5,50	8,35	13,92	6,22	
	ложные группы	4,00	6,92	12,79	9,80	
	одна группа	4,04	6,90	12,98	9,68	

Стоит обратить внимание, что p -значения MCS для стандартных моделей ВЕКК весьма малы (полная ВЕКК-модель доминирует модели с ограничениями, за исключением критерия 'var'), в то время как самые большие p -значения относятся к спатально-структурированной модели ВЕКК. В частности, самое большое p -значение среди стандартных спецификаций — это 32% для «полной» в соответствии с нормой Фробениуса. Тот же самый критерий не отвергает любую группировку при использовании скалярно-гомогенного спатального ограничения, что видно по минимуму p -значения, равному 42% в первой колонке таблицы 5. Это происходит вне зависимости от рассматриваемого критерия, но критерий может резко повлиять на выбор лучшей группировки и спатального ограничения. Обратим внимание, что гетерогенные (т.е. наименее ограниченные) спатальные ВЕКК-модели без использования группировки («одна группа») улучшили прогнозную эффективность по сравнению со стандартной полной ВЕКК-моделью: p -значения 42% против 32% в случае нормы Фробениуса, 87% против 29% в случае нормы Штейна и т.д. Также, гомогенные и скалярные спатальные спецификации демонстрируют лучшую прогнозную эффективность по сравнению с диагональной и скалярной стандартными спецификациями для тех же мер. Это является сигналом того, что внедрение спатальной структуры в модель ВЕКК способно улучшить ее предсказательную способность.

Таблица 5: p -значения множеств моделей доверия, Набор данных А

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob	stein	lscore	var	
стандартная		скалярная	3,0	13,9	0,0	28,7	
		диагональная	16,4	11,5	0,1	28,7	
		полная	31,9	29,3	20,4	8,6	
спатальная	ск-гомо	обе	42,6	42,0	0,0	28,7	
		отрасль	96,3	5,4	100,0	0,2	
		страна	100,0	27,0	86,4	0,1	
		ложные группы	88,9	19,1	4,8	1,1	
		одна группа	99,8	87,5	5,1	40,0	
		гомо	обе	99,8	100,0	9,9	28,7
	гр-гомо	отрасль	0,0	0,0	0,1	0,0	
		страна	99,8	87,5	75,6	4,9	
		ложные группы	99,8	10,1	100,0	0,0	
		одна группа	0,0	0,0	1,8	72,3	
		гетеро	обе	22,8	87,5	5,1	28,7
			отрасль	0,0	0,0	0,4	0,0
страна	0,0		0,0	0,0	100,0		
ложные группы	11,1		3,6	9,9	0,6		
		обе	11,1	16,7	0,0	18,7	
		отрасль	0,0	0,0	4,8	0,0	
		страна	0,0	0,0	0,0	72,3	
		ложные группы	99,8	16,7	100,0	0,3	
		одна группа	42,6	87,5	9,9	17,9	

Замечание: Маленькие p -значения свидетельствуют о том, что модель легко исключается из множества, включающего лучшую.

Большинство наиболее удачных спецификаций являются спатальными спецификациями (обратим особое внимание на значения, равные 100 в таблице 5), с сильными ограничениями (скалярные гомогенные) или с ограничениями средней силы (гомогенные и гомогенные по группам) в зависимости от критерия. Гетерогенная спатальная модель ВЕКК способна произвести хорошие результаты только для непреднамеренных спецификаций — когда группировка не применяется, или когда она организована некорректно. В частности, обратим внимание на две последние строки таблицы, где p -значения существенно выше, чем для корректно организованных спецификаций. Тот факт, что неверная организация группировки может улучшить прогнозную эффективность не только по сравнению со стандартной моделью ВЕКК, но и по сравнению с корректной организацией, является проблематичным. Корректная группировка по отрасли и/или по стране может привести к существенному улучшению эффективности прогнозирования, но какая именно, сильно зависит от критерия. В то время как один критерий предпочитает спатальную группировку по индустрии, другой критерий может посчитать такую спецификацию наихудшей.

5.2 Набор данных В

Далее мы переходим к анализу восьми активов и трех возможных критериев группировки. Дополнительный критерий — это стоимость компании, или размер, согласно рыночной капитализации, которая принимает одно из двух значений — большая капитализация или маленькая. Средние значений функций потерь для Набора данных В приведены в таблице 6, а p -значения MCS — в таблице 7.

Таблица 6: Средние значения функций потерь, Набор данных В

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob ($\times 10^{-2}$)	stein	lscore ($\times 10$)	var ($\times 10^2$)		
стандартная	скалярная		152,59	19,19	9,72	19,66		
	диагональная		152,04	19,13	9,71	19,50		
	полная		151,81	19,16	9,65	18,34		
ск-гомо		все	152,37	19,17	9,66	18,36		
		отрасль	155,46	19,21	9,64	20,00		
		страна	152,45	19,20	9,63	20,06		
		размер	152,64	19,21	9,65	20,22		
		отрасль+страна	152,38	19,17	9,65	18,50		
		отрасль+размер	152,56	19,18	9,64	18,88		
		страна+размер	152,31	19,17	9,64	18,89		
		одна группа	152,84	19,18	9,66	18,42		
		гомо		все	151,82	19,10	9,65	17,73
				отрасль	151,97	19,15	9,62	19,96
страна	151,89			19,13	9,62	19,66		
размер	151,95			19,16	9,61	19,96		
отрасль+страна	151,90			19,13	9,66	17,98		
отрасль+размер	151,72			19,12	9,64	18,37		
страна+размер	151,92			19,13	9,63	19,01		
спатальная		одна группа	151,83	19,11	9,66	17,71		
		все	152,09	19,14	9,66	17,99		
		отрасль	151,77	19,17	9,60	20,27		
		страна	152,42	19,21	9,63	20,29		
		размер	152,22	19,18	9,63	20,06		
		отрасль+страна	151,78	19,12	9,63	18,50		
		отрасль+размер	151,91	19,16	9,63	19,13		
		страна+размер	152,01	19,12	9,66	18,13		
		гетеро		все	151,69	19,13	9,59	18,16
				отрасль	151,74	19,17	9,58	20,65
				страна	153,24	19,48	9,56	25,88
				размер	152,44	19,27	9,60	20,33
				отрасль+страна	152,06	19,22	9,57	19,65
отрасль+размер	152,19			19,19	9,63	19,13		
страна+размер	151,77			19,18	9,55	19,40		
одна группа	151,93	19,27	9,60	17,84				

Таблица 7: p -значения множеств моделей доверия, Набор данных В

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob	stein	lscore	var
стандартная	скалярная		53,7	87,8	0,1	6,2
	диагональная		58,1	76,8	0,2	4,2
	полная		56,2	2,4	87,4	54,5
спатальная	ск-гомо	все	28,5	97,7	6,5	37,2
		отрасль	24,8	94,5	0,4	17,7
		страна	38,5	87,6	0,2	13,9
		размер	29,2	92,0	0,2	10,3
		отрасль+страна	26,8	97,7	4,7	36,7
		отрасль+размер	28,5	97,7	6,5	21,5
		страна+размер	26,8	87,0	0,6	19,8
		одна группа	28,5	97,7	1,6	26,5
	гомо	все	64,6	100,0	20,0	54,5
		отрасль	47,9	60,2	0,8	10,3
		страна	66,1	98,0	1,4	19,8
		размер	64,6	99,9	2,4	11,9
		отрасль+страна	64,6	87,7	1,2	22,0
		отрасль+размер	56,2	100,0	17,5	54,5
		страна+размер	66,1	100,0	17,7	54,5
одна группа	66,1	100,0	87,4	56,7		
гр-гомо	все	35,2	92,1	83,6	54,5	
	отрасль	55,0	42,3	83,6	54,5	
	страна	66,1	87,4	0,8	16,4	
	размер	64,6	100,0	2,4	10,3	
	отрасль+страна	47,9	89,9	19,0	54,5	
	отрасль+размер	47,9	76,8	51,9	54,5	
	страна+размер	66,1	99,9	34,9	54,5	
	одна группа	100,0	100,0	100,0	100,0	
	гетеро	все	57,4	40,7	83,6	54,5
		отрасль	38,5	27,8	0,2	10,3
страна		64,6	98,0	1,3	16,1	
размер		56,2	44,5	0,4	5,2	
отрасль+страна		47,9	98,0	1,7	13,9	
отрасль+размер		26,4	97,7	63,7	42,5	
страна+размер		64,6	99,4	28,9	42,5	
одна группа	38,5	98,0	56,8	54,5		

Замечание: Маленькие p -значения свидетельствуют о том, что модель легко исключается из множества, включающего лучшую.

Можно отметить, что для данного набора данных стандартная полная модель ВЕКК дает очень хорошие результаты для большинства критериев оценки (самое маленькое p -значение 9% для скалярного ограничения и критерия 'lscore'), несмотря на то, что лучшие результаты показаны спатально-структурированными моделями ВЕКК. Обратим внимание, что

расхождения между критериями эффективности (возможно, кроме критерия ‘var’) не так резки, как для Набора данных А, причем норма Фробениуса является наименее дискриминирующей в этом случае. Здесь также наблюдается большая степень гетерогенности в терминах эффективности среди критериев оценки прогнозной эффективности, типов спатальных ограничений и критериев группировки. К примеру, критерий Штейна выбирает гомогенную спецификацию со всеми тремя принципами группировки, в то время как логарифмический счётчик предпочитает гетерогенную спецификацию и особенно группировку по странам и капитализации. Как и ранее, чисто спатальная структура без группировки часто дает возможность модели произвести хорошие прогнозы, так же как и при, казалось бы, более пригодной группировке — обратим внимание, что гомогенная спецификация с одной группой для всех активов выбрана в соответствии с критерием стоимости риска.

Таблица 8: p -значения множеств моделей доверия, Набор данных В, большая капитализация

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob	stein	lscore	var	
стандартная	скалярная		14,2	80,1	0,6	22,8	
	диагональная		85,5	88,6	1,2	22,8	
	полная		100,0	25,1	30,9	15,0	
ск-гомо	обе	отрасль	12,3	88,6	2,8	22,8	
		страна	23,9	45,3	3,7	1,2	
	ложные группы	одна группа	6,4	18,7	4,5	0,5	
		одна группа	6,4	9,0	1,7	1,3	
		одна группа	47,4	88,6	7,6	22,8	
	гомо	обе	отрасль	99,5	100,0	3,6	22,8
		отрасль	страна	95,6	80,1	2,2	0,5
страна		ложные группы	57,3	73,3	1,2	0,5	
ложные группы		одна группа	85,5	61,2	1,7	0,5	
спатальная	одна группа	одна группа	0,0	0,0	0,0	100,0	
		одна группа	обе	100,0	81,0	3,6	22,8
		отрасль	10,2	11,7	3,0	10,1	
		страна	100,0	65,4	8,3	0,2	
	гр-гомо	ложные группы	85,5	45,3	1,7	0,5	
		обе	отрасль	85,5	55,4	1,7	22,8
		отрасль	страна	85,5	39,1	1,2	0,5
		страна	ложные группы	0,0	0,0	30,9	3,6
	гетеро	ложные группы	одна группа	100,0	14,1	100,0	0,0
		одна группа	57,3	18,9	7,6	22,8	

Замечание: Маленькие p -значения свидетельствуют о том, что модель легко исключается из множества, включающего лучшую.

Наиболее удачные группировки включают в себя группировку по капитализации, которая, как ни удивительно, кажется наиболее важным критерием в спатальной структуре. Действительно, среди трех предложенных принципов группировки капитализация, вероятно, наиболее близка к понятию волатильности — компании с малой капитализацией обычно являются более рискованными, чем компании с большой капитализацией. Как и в случае

со стандартными моделями ВЕКК, слишком ограниченная параметризация спатальных ВЕКК-структур, вероятно, снижает шансы на лучшую эффективность.

Таблица 9: p -значения множеств моделей доверия, Набор данных В, малая капитализация

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob	stein	lscore	var
стандартная	скалярная		45,1	47,7	27,6	54,9
	диагональная		45,5	59,0	61,7	54,9
	полная		64,0	0,5	100,0	1,6
спатальная	ск-гомо	обе	47,3	40,1	61,6	40,5
		отрасль	62,4	10,5	29,4	0,1
		страна	63,0	29,3	26,9	0,1
		ложные группы	39,4	0,2	72,3	0,1
		одна группа	64,0	27,1	29,4	61,0
	гомо	обе	90,9	91,8	72,3	54,9
		отрасль	45,1	18,1	63,7	0,0
		страна	50,8	30,2	67,4	0,2
		ложные группы	39,4	0,1	64,9	0,1
		одна группа	90,9	100,0	72,3	61,0
гр-гомо	обе	100,0	91,8	72,3	54,9	
	отрасль	22,9	30,5	68,9	0,2	
	страна	45,1	47,7	72,3	0,2	
	ложные группы	31,2	0,1	61,6	0,2	
гетеро	обе	58,4	57,0	72,3	11,2	
	отрасль	50,8	47,7	72,3	0,0	
	страна	36,3	35,2	72,3	0,2	
	ложные группы	0,2	0,0	29,4	61,0	
	одна группа	45,5	18,1	72,3	100,0	

Замечание: Маленькие p -значения свидетельствуют о том, что модель легко исключается из множества, включающего лучшую.

Чтобы проверить робастность этих результатов, мы разделили Набор данных В на два — один для компаний с большой капитализацией, а другой для компаний с малой капитализацией; прогнозирование с одним из этих наборов данных (особенно с большой капитализацией) таким образом становится похожим на предыдущий анализ Набора данных А. Результаты для компаний с большой капитализацией из Набора данных В можно найти в таблице 8, а для компаний с маленькой капитализацией — в таблице 9. Можно отметить, что относительно некоторых мер эффективности ('stein' и 'var') полная стандартная модель ВЕКК теряет свой статус одной из лучших (обратим внимание на разницу между 88% и 80% в таблице 7 и соответственно 25% и 15% в таблице 8). Разные спецификации становятся более различимыми по эффективности прогнозирования. К примеру, скалярная гомогенная и гомогенная легко отвергаются для любого критерия группировки в соответствии с логарифмическим счётчиком. Однако, как и для Набора данных А, спатальная структура с некорректной группировкой или без группировки вполне может выиграть у аналогичной спатальной структуры с любой интуитивно обоснованной группировкой. Итого, некоторые более гибкие спатальные струк-

туры имеют больше шансов оказаться среди лучших, но изначально неясно, какое именно спатальное ограничение и какая группировка имеет наибольший шанс стать лучшей.

6 Заключение

Представляется, что присутствие спатальной структуры в модели ВЕКК может быть полезным для прогнозирования волатильности в сравнении со стандартной моделью ВЕКК. Однако, этот выигрыш в эффективности прогнозирования очень хрупок и чувствителен ко множеству факторов, таких как выбор критерия оценки прогнозной эффективности, тип наложенных спатальных ограничений, число группировок в спатальной структуре и принципы формирования спатальных групп. Некорректное разделение по группам иногда приводит к прогнозной эффективности, которая как минимум не хуже разделения по корректным, интуитивно обоснованным группам. Результаты также сильно варьируются с числом активов в портфеле и с композицией портфелей.

Список литературы

- Aielli, G.P. (2013). Dynamic conditional correlation: On properties and estimation. *Journal of Business & Economic Statistics* 31(3), 282–299.
- Anatolyev, S. & S. Khrapov (2015). Right on target, or is it? The role of distributional shape in variance targeting. *Econometrics* 3(3), 610–632.
- Anatolyev, S. & N. Kobotaev (2018). Modeling and forecasting realized covariance matrices with accounting for leverage. *Econometric Reviews* 37(2), 114–139.
- Bollerslev, T., R.F. Engle & J.M. Wooldridge (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy* 96(1), 116–131.
- Caporin, M. & M. McAleer (2008). Scalar BEKK and indirect DCC. *Journal of Forecasting* 27(6), 537–549.
- Caporin, M. & M. McAleer (2012). Do we really need both BEKK and DCC? A tale of two multivariate GARCH models. *Journal of Economic Surveys* 26(4), 736–751.
- Caporin, M. & M. McAleer (2014). Robust ranking of multivariate GARCH models by problem dimension. *Computational Statistics and Data Analysis* 76, 172–185.
- Caporin, M. & P. Paruolo (2015). Proximity-structured multivariate volatility models. *Econometric Reviews* 34, 559–593.
- Clements, A., M.B. Doolan, S.A. Hurn & R. Becker (2012). On the efficacy of techniques for evaluating multivariate volatility forecasts. Working paper, Queensland University of Technology.
- Ding, Z. & R.F. Engle (2001). Large scale conditional covariance matrix models, estimation and testing. *Academia Economic Papers* 29(2), 157–184.
- Engle, R.F. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics* 20(3), 339–350.
- Engle, R. & K.F. Kroner (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory* 11, 122–150.
- Engle, R.F. & J. Mezrich (1996). GARCH for groups. *Risk* 9, 36–40.
- Ferreira, M.A. & J.A. Lopez (2005). Evaluating interest rate covariance models within a value-at-risk framework. *Journal of Financial Econometrics* 3(1), 126–168.
- Hansen, P. R., A. Lunde & J.M. Nason (2011). The model confidence set. *Econometrica* 79, 453–497.
- Laurent, S., J.V.K. Rombouts & F. Violante (2012). On the forecasting accuracy of multivariate GARCH models. *Journal of Applied Econometrics* 27, 934–955.
- LeSage, J. & R.K. Pace (2009). *Introduction to Spatial Econometrics*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis.
- Patton, A.J. & K. Sheppard (2009). Evaluating volatility and correlation forecasts. Глава в *Handbook of Financial Time Series* под редакцией T.G. Andersen, R.A. Davis, J.-P. Kreiss & T. Mikosch. Berlin: Springer, 801–838.

Do spatial structures yield better volatility forecasts?

Stanislav Anatolyev

*CERGE-EI, Prague, Czech Republic
New Economic School, Moscow, Russia*

Stanislav Khrapov

Schenker AG, Frankfurt am Main, Germany

We evaluate, using forecasting experiments with real stock return data, forecasting ability of spatially structured BEKK specifications relative to standard BEKK. We confirm that the class of spatial BEKK has a potential of improving a quality of multivariate volatility forecasts. However, there is a sharp disagreement among forecast performance criteria on which types of further restrictions on coefficient matrices are most promising, on which degree of homogeneity of matrix coefficients is most beneficial, and on which grouping criteria and their number deliver highest improvements in volatility forecasts. The numerosity and composition of the portfolio also have a big influence on how well volatility is forecast by spatially structured BEKK compared to its standard configuration.

